Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Prostředí Biland ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ

The enviroment Biland in teaching mathematics in primary school

Tereza Vybíralová

Vedoucí práce: PhDr. Jana Slezáková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

2018

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Prostředí Biland ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 13. 7. 2018

....

podpis

Tímto bych ráda poděkovala své vedoucí PhDr. Janě Slezákové, Ph.D. za vedení diplomové práce. Jsem velmi vděčná za její cenné rady a odborné konzultace, a především za neutuchající podporu a motivaci, které se mi během psaní práce dostávalo v obrovském množství. Zároveň bych ráda poděkovala paní učitelkám a žákům, kteří mi umožnili realizovat mé experimenty. V neposlední řadě bych svoji vděčnost chtěla vyjádřit také rodině a přátelům, jež mi byli oporou po celou dobu studia.

ABSTRAKT

Tato diplomová práce pojednává o didaktickém matematickém prostředí Biland. Teoretická část práce nejprve vymezuje dvě protipólní pojetí výuky, transmisivní a konstruktivistické, a posléze je porovnává. Dále se v rámci konstruktivistického stylu se zaměřuje na Hejného metodu výuky matematiky a definuje dva základní pilíře této koncepce. Prvním z nich je osobnost učitele, druhým pilířem je obsah, jež je žákům zprostředkováván skrze matematická didaktická prostředí.

Práce představuje prostředí Biland, popisuje, na jakém matematickém základě je postaveno, a ukazuje tak, proč má své místo ve výuce matematiky. Odpovídá na otázku, v čem je prospěšná výuka různých číselných soustav v matematice, a proto také nabízí pohled na historický vývoj číselných soustav. Kromě toho práce mapuje jednotlivé úlohy pro druhý a třetí ročník v učebnicích matematiky Hejný a kol. od nakladatelství FRAUS.

Stěžejním cílem empirické části je představit přípravu a realizaci konstruktivistického zavedení prostředí Biland, jež bylo uskutečněno ve dvou experimentech a zaznamenáno do protokolů. Po realizaci proběhla analýza jednotlivých protokolů, která pomohla porozumět problematice prostředí Biland. Jako další cíl si práce stanovuje analýzu žákovských řešení v pracovních listech, jež byly žákům v návaznosti na experimenty rozdány. Posledním cílem práce byla realizace dotazníkového šetření mezi učiteli, které zjišťuje vztah učitelů k tomuto prostředí, a jeho následné vyhodnocení.

KLÍČOVÁ SLOVA

prostředí Biland, číslo jako veličina, poziční soustava, dvojková soustava, řešitelské strategie

ABSTRACT

The diploma thesis deals with the topic of a didactic mathematical environment Biland. The theoretical part is concerned with the definition of two opposite educational styles, transmissive and constructivist, and their comparison. Within the constructivist educational style, it is also focused on The Hejný's method, and it defines the two basic pillars of this conception. The first pillar is the personality of the teacher and the other one is the mathematical content, which is provided by different mathematical environments.

This diploma thesis introduces the environment Biland, describes on which mathematical basis it stands on and shows why should be Biland included into the teaching of mathematics. It answers the question of importance of teaching also non-base ten systems and therefore it describes the history of place-value system. It also studies the tasks in contemporary textbooks of mathematics for primary schools by Hejný et al. published by publishing house FRAUS.

The practical part includes the preparation and implementation of experiments in which the new environment Biland was introduced to the pupils. The experiments were recorded into protocols, followed by analysis. Another aim of the practical part was creation of worksheets for the pupils which were handed out after the experiments and the pupils' solving strategies were analysed. The last part of the practical section was creation, distribution and evaluation organization of a questionnaire detecting teachers' attitude to the environment Biland.

KEYWORDS

the environment Biland, number as a magnitude, place-value system, binary system, solving strategies

Obsah

Úvod

Moje cesta k matematice by se dala popsat jako plavba po rozbouřeném moři. Začátek plavby byl poklidný a na počátku školní docházky mi matematika dělala velkou radost. Nic se nezměnilo ani s přechodem na druhý stupeň, a dokonce ani na gymnázium. Díky obrovskému štěstí na vyučující jsem matematickým světem proplouvala bez větších zádrhelů. Úspěšně jsem zdolala i zdánlivě nebezpečnou výpravu zvanou státní maturita. První střet s matematikou přišel až na vysoké škole.

Vzpomínám si na ten pocit, když jsem se dostavila na úvodní seminář do studia matematiky. Tehdy začala jsem se z nenadání topit. Univerzitní moře bylo rozbouřené a záchranný kruh byl v nedohlednu.

S úlohami na seminářích jsem si nevěděla rady, při přednáškách mi přišlo, že vyučující mluví jinou řečí. Nerozuměla jsem kočičkám a myškám a přišlo mi absurdní, že si na vysoké škole nosím na semináře dřevěné kostičky. Sama sebe jsem se ptala, k čemu mi to je. Spoustu přednášek jsem nevěřícně zírala na tabuli, bouřila se během seminářů a horlivě diskutovala u zkoušek, které jsem občas opouštěla s odřenýma ušima.

Jak já budu někdy moct učit děti? Jak jim to vysvětlím, když tomu sama nerozumím. Opakovala jsem si stále dokola a neustále se na to všech kolem sebe vyptávala. Na mou otázku mi bylo odpovězeno, že já vysvětlovat nikomu nic nebudu. Tomu jsem absolutně nerozuměla. A hrozně mě to rozčilovalo. Durdila jsem se, protože jsem chtěla být skvělá učitelka a všechno dětem dopodrobna vysvětlit. Dnes, po několikaletém odstupu, můžu říct, že chci být ta skvělá učitelka, která vysvětlovat nebude, ale naopak bude dětem nabízet takové situace, ve kterých bude dost prostoru pro objevování a vzájemné sdílení.

Za zlomový okamžik své matematické plavby považuji průběžnou praxi z matematiky ve čtvrtém ročníku. Před přípravou na vyučování jsem stála před zásadním rozhodnutím. První možností bylo zavedení nového prostředí Biland. Tu druhou už si ani nevybavuji.

Dlouho jsem se rozmýšlela. Moje obavy byly obrovské, moje sebevědomí bylo nízké, ale moje zvědavost a odvaha předčila výše zmíněné. Rozhodla jsem se výzvu přijmout.

Přípravu na hodinu jsem pojala opravdu poctivě a nastudovala jsem si všechny materiály ze svých předchozích studií. Důsledně jsem přípravu konzultovala se svou vyučující, paní docentkou Jirotkovou, která mě v mém odhodlání podporovala.

Během příprav jsem však marně v metodické příručce hledala nějaký návod na to, jak prostředí zavést. Z tohoto důvodu jsem se rozhodla vstup do nového prostředí pojmout po svém, ale zároveň respektovat zásady konstruktivismu.

Po odučené hodině, která se opravdu vyvedla, jsem ze třídy odcházela s neuvěřitelným pocitem. Naplňovalo mě štěstí a pocit radosti. Aha, takže takhle to funguje. Dlouhé diskuze na seminářích ani hodiny strávené nad literaturou mi nedaly tolik, jako pouhých 45 minut čiré zkušenosti. A ačkoli to zní jako příšerné klišé, dokud si to nevyzkoušíte, je opravdu těžké tomu uvěřit. Od té doby se matematika opět vyšplhala na přední příčky mých oblíbených předmětů. Začala jsem vyhledávat příležitosti a události, které mohly rozšířit mé matematické poznání. Strávila jsem další dny na matematických seminářích a konferencích, dvakrát jsem dokonce měla tu možnost můj způsob zavedení prostředí a svou radost sdílet s ostatními kamarády, ale především zkušenými kolegy. Nabyté zkušenosti z praxí, mi do sebe začaly zapadat jako kousky skládačky. A najednou z nich začal vystupovat obrázek. Vím, že mému obrázku ještě spoustu dílků chybí a některé se možná ani nikdy nenajdou, ale i tak vím, že tohle je přesně ten směr, kterým se chci ve své učitelské plavbě vydat.

Kdyby mi někdo ve druhém ročníku řekl, že za pár let budu na téma Biland psát diplomovou práci, kroutila bych nad tím nevěřícně hlavou. Biland bylo totiž prostředí, se kterým jsem v průběhu předmětu Aritmetika bojovala ze všeho nejvíc. Nerozuměla jsem systému jedniček a nul, zoufale přepočítávala groše tam a zpátky, a zkrátka nechápala, proč by se tomu měly věnovat děti na prvním stupni. Vždyť to mě nikdo neučil ani na gymnáziu.

Ještě před nástupem do posledního ročníku jsem zamýšlela psát diplomovou práci na katedře primární pedagogiky. Žádná jiná možnost nepřicházela v úvahu.

Všechno se ale změnilo na letní škole o Hejného metodě, kde jsem byla především jako pomocná ruka při organizaci. Když jsem se před začátkem letní školy se svou nynější vedoucí, paní doktorkou Slezákovou, potkala, mezi řečí podotkla, že doufá, že píšu diplomovou práci na katedře matematiky. S úsměvem jsem odvětila, že to teda určitě ne. A pak začala letní škola. Strávila jsem čtyři dny řešením úloh, sdílením s ostatními kolegy, a především poznáváním sebe samotné. Letní školu jsem opouštěla s tím, že se matematice chci věnovat ještě víc. A proto jsem se rozhodla změnit na poslední chvíli katedru, vedoucí a téma své diplomové práce. Po vyřízení všech byrokratických záležitostí jsem uháněla na katedru a poprosila paní doktorku, zda by si mě vzala pod svá křídla. A tak jsem začala pracovat na této diplomové práci.

Jejím cílem bude:

-představit prostředí Biland

-analyzovat a okomentovat úlohy, které se nacházejí v učebnici matematiky (Hejný a kol., nakl. FRAUS) pro 2. a 3. ročník

-analyzovat nahrávku vyučovací hodiny, ve které dochází k zavedení prostředí Biland

-po zavedení prostředí dát žákům pracovní list s úlohami a analyzovat žákovská řešení

-provést dotazníkové šetření mezi učiteli o jejich vztahu k prostředí Biland a vyhodnotit ho

1 Vyučování matematice

Dodnes vzpomínám, jak jsem si v hodinách matematiky poctivě přepisovala vzorečky z tabule do sešitu, barevně si je zvýrazňovala a doma se je učila nazpaměť. Úlohy v písemných pracích jsem s radostí řešila, ale kámen úrazu přišel v případě, že úloha byla jiná než ty, které jsem si doma spočítala. Spousta problémů, které se v hodinách matematiky objevila, jsem na první pohled řešila bez problému, ale ve skutečnosti jsem jim často nerozuměla do hloubky. Ačkoli jsem nad úlohami přemýšlela, můj vhled byl povětšinou velmi povrchový.

I přesto, že jsem měla, dle mého názoru, kvalitní vyučující, které se nás snažily vést k tomu, abychom nad úlohami přemýšleli a nebáli se chybovat, bohužel v hodinách nebylo moc prostoru k objevování. Všechna pravidla a zákonitosti nám byly předloženy jako hotová věc. To, že nám poznání předávaly jako finální produkt, je řadí do skupiny učitelů, jejichž styl výuky nazýváme transmisivním. Zároveň bych však chtěla podotknout, že vzhledem k tomu, jak silně je u nás transmisivní styl zakořeněn, je naprosto pochopitelné, že je to způsob, který mé vyučující volily. A dost možná neměly o tom, že by se dala zvolit jiná cesta a že existuje také konstruktivistické pojetí výuky, ani tušení.

Do této skupiny jsem je zařadila na základě klasifikace, kterou uvádí Hejný (2014). *„Edukační styly klasifikujeme podle míry intelektuální autonomie, kterou učitel dává žákovi podle toho, jak výrazně se na odhalování matematických poznatků podílejí žáci. Když je učivo žákům předkládáno, mluvíme o transmisivním edukačním stylu. Když se žáci na objevování matematiky výrazněji podílejí, mluvíme o edukačním stylu konstruktivistickém“* (Hejný, 2014, s. 113).

V následující kapitole se těmto dvěma edukačním stylům budu věnovat podrobněji, uvedu jejich charakteristické rysy a na závěr je porovnám.

Samozřejmě jsem si vědoma toho, že škála mezi těmito dvěma protipóly je velmi bohatá, ale pro snazší charakteristiku jsem se rozhodla popsat tyto *dva základní proudy v jejich „krystalické podobě“* (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 10).

1.1 Transmisivní pojetí výuky

Jedním z pólů na výše zmíněné škále je transmisivní[1] pojetí výuky. Tento způsob vyučování u nás má velkou tradici a stále je velmi rozšířenou formou výuky. Učitel čerpá ze svých zkušeností a nabyté vědomosti žákům pouze přeposílá. Takový učitel je Hejným a Stehlíkovou popsán jako: „*učitel, který věří, že poznání lze přenést z hlavy učitele do hlavy žáka, „neztrácí“ čas etapami modelů a dává žákům hotové abstraktní poznatky*“ (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 29).

Hejný a Kuřina doplňují, že vzdělávání, jež *„je prioritně orientováno na transmisi (přenos) části hotové vědy ze světa kultury (z učitelovy mysli, učebnic, encyklopedií a monografií...) do pamětí žáků, není optimální, protože není v zásadě orientováno na porozumění, ale na fakta a výsledky*“ (Hejný, Kuřina, 2015, s. 193).

Výuka je proto často frontální, organizovaná na základě učebnice, v nichž je obsah založen na jednotlivých tematických celcích, které jsou uzavřené a nepropojené. Učitel úlohy žákům zadává a ti je za jeho doprovodu řeší.

Hejný a Stehlíková zároveň podotýkají, že při transmisivním stylu výuky není často dodržováno schéma poznávacího procesu[2], a naopak je velmi běžné, že žák neprochází postupně jednotlivými modely. Na cestě za poznáním se vydává zkratkou, což způsobuje, že jeho poznání je „*urychlené*" a nedostatečné. Žák od učitele převezme nový poznatek, který si snaží zapamatovat, což je pro základní použití dostačující, zároveň však žáka značně omezuje v rozvíjení či obměňování tohoto poznatku. Z čehož vyplývá, že „*takové poznání vlastně není skutečným poznáním, je pouze jeho protézou. Takové poznání nazveme formální*“ (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 28).

A tak je závěrem naprosto nezbytné upozornit na problematiku formálního poznání, jež, jak uvádí Hejný a Stehlíková, je často důsledkem transmisivního vyučovacího stylu.

[1] V souvislosti s transmisivním pojetím výuky potřeba zmínit také instruktivní edukační styl. „Instruktivní edukační styl se shoduje se stylem transmisivním, pokud jde o výklad učiva. Liší se od něj v tom, že připouští jen ty postupy, které žáků předvádí učitel“ (Hejný, 2014, s. 115).

[2] Problematika poznávacího procesu je podrobněji rozpracována v kapitole 1.2.

Proto je formalismus považován za „*nejvážnější didaktický problém současného vyučování matematice*“ (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 29).

1.2 Konstruktivistické pojetí výuky

Na opačném konci pomyslné škály stojí konstruktivistické pojetí výuky. Toto pojetí je charakteristické tím, že žáci jsou učitelem vedeni k objevování a nabývání svých vlastních zkušeností. „*Skutečné poznání je postaveno na osobní zkušenosti člověka. Zkušenost nelze přenášet, přenášet lze pouze informace. Proto si skutečné poznání musí každý člověk vytvořit sám na základě svých vlastních zkušeností. Edukační styl, který je veden snahou učitele vést žáky cestou popsaného poznávacího mechanismu, nazýváme konstruktivismus*“ (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 29).

Poznávací proces je rozfázován do pěti etap[3]. Tou první je *motivace*, jež je chápána jako tenze, která způsobuje touhu za poznáním. Druhým krokem je *etapa separovaných (izolovaných) modelů*. Izolované modely jsou dílčí zkušenosti, které si žák hromadí, ale zatím neví, že spolu souvisí. Poznání, že je mezi modely určitá vazba, přichází ve třetí etapě, *etapě univerzálních (generických) modelů*. „*Generický model je klíčovým pojmem procesu a je to poznání toho, co všechny dřívější jednotlivé zkušenosti izolované modely, spojuje*“ (Hejný, 2014, s. 40). Čtvrtou etapou je *abstraktní poznatek,* jež je často doprovázen změnou jazyka. Abstraktní poznatek můžeme vymezit skrze porovnání s poznatkem formálním. „*Když se poznatek dostal do paměti jako informace, je to poznatek formální. Jestliže byl vytvořen abstrakčním zdvihem z generického modelu, je to abstraktní poznatek*“ (Hejný, 2014, s. 58). Poznávací proces se uzavírá pátou etapou, zvanou *krystalizace*. Zároveň je však potřeba upřesnit, že krystalizace není pouze poslední etapou, naopak probíhá soustavně, a někdy se s ní setkáváme již u izolovaných modelů, i když je to častější až u modelů generických. „*Jejím hlavním cílem je vytvořit dostatečně hustou síť vazeb mezi*

[3] „*Myšlenka poznávacího procesu byla za posledních 35 let výrazně rozšířena a prohloubena […]. V důsledku překladu teorie do angličtiny došlo k terminologickým úpravám. Na návrh Adriana Simpsona byl termín univerzální model přeložen jako generic model a následně i český termín byl změněn na generický model. Na návrh Grahama H. Littlera byl termín separovaný model přeložen jako isolated model a následně změněn i český termín na izolovaný model*“ (Hejný 2014, s 40).

jednotlivými poznatky. Krystalizace je proces uhnízdění nového poznatku ve vědomí žáka, nejednou ve dvou nebo i více oblastech". (Hejný, 2014, s. 73)

Čapek dodává, že jeden ze základních pilířů konstruktivistické výuky spočívá v přístupu učitele. Učitel k žákům přistupuje s vědomím, že žáci do školy vstupují již s určitými znalostmi a dovednostmi, jež jsou pochopitelně na odlišné úrovni. „*Učiteli nepřísluší všechny dorovnat na požadovanou (ideální) rovinu, nýbrž každého žáka vést k tomu, aby sám vůči sobě dosáhl co nejvyšší možné úrovně těchto vědomostí a dovedností*" (Čapek, 2015, s. 289-290).

V rámci konstruktivistického pojetí výuky existuje nepřeberné množství metod. Ačkoli se metody méně či více liší, všechny podporují ve výuce řešení problémů ze života, tvořivé myšlení a práci ve skupině (Čapek, 2015, s. 289).

Jedním ze zástupců jsou metody *diskuzní*, které jsou Maňákem a Švecem charakterizovány jako metody, jež jsou založeny diskuzi učitele a žáky. Dalším zástupcem jsou metody *situační*, jež spočívají v řešení problémových situací z reálného života. (Maňák, Švec, 2003, s. 108-122)

Další konstruktivistická metoda, která je zároveň stěžejní pro mojí diplomovou práci, je *Hejného metoda výuky matematiky*, a proto jí věnuji celou následující kapitolu.

1.2.1 Hejného metoda výuky matematiky

Myšlenky konstruktivismu byly Hejným zpracovány do nové koncepce, jež „*usiluje o maximální autonomní poznávací proces žáka. Tento styl je zaměřený na budování matematických schémat žáků*", a tak dostala název *Vyučování orientované na budování mentálních schémat*[4] (Hejný, 2014, s. 81).

„Metoda VOBS stojí na dvou pilířích: na učiteli a na učivu uchopeném do sítí úloh vložených do didaktických prostředí" (Hejný, 2014, s. 121)

[4]Pro tento název se běžně používá zkratka VOBS (název vychází z anglické pojmu Schema oriented education – SOE).

Prvním pilířem je osobnost učitele. *„Učitel je rozhodující aktér edukačního procesu. Jeho edukační styl je určen jeho osobností, jeho pedagogickým a didaktickým přesvědčením*“ (Hejný 2014, s. 127).

Učitel, jenž je orientován na konstruktivistický styl, bývá často konfrontován okolím. Což není až tak překvapující, jelikož tradiční transmisivní přístup je hluboko zakořeněn a takové tradice se těžko mění ze dne na den.

Výuka je velmi různorodá, učitel ve třídě buduje pracovní klima a s žáky utužuje partnerské vztahy. Současně žáky vyzývá k řešení úloh a s nadšením vítá, když úlohy do hodin přináší žáci sami. Úlohy často graduje a reaguje tak na individuální schopnosti svých žáků. Také ve třídě podporuje diskuzi a veškeré dění ve třídě s žáky plnohodnotně prožívá.

Druhým pilířem je obsah. Na rozdíl od transmisivního vyučovacího stylu, jenž následuje jednotlivé tematické celky, konstruktivistické pojetí výuky obsah záměrně propojuje, a úlohy žákům nabízí skrze jednotlivá prostředí, jež jsou základem pro budování matematických schémat.

„*Termín Didaktické matematické prostředí je modifikací Substantial learning environment, který byl do odborné literatury zaveden Erichem Wittmannem v roce 2001*“ (Hejný 2014, s. 13)

Wittmann didaktické matematické prostředí definuje v následujících čtyřech bodech[5]:

- představuje základní cíle, obsah a principy výuky matematiky na určité úrovni

- zároveň je vázáno na matematických obsah, postupy a procesy, jež se nachází nad touto úrovní a je bohatým zdrojem matematických aktivit

[5] Následující text byl přeložen na základě materiálu, jež je dostupný na: https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_11_et_suppl/adsc11 supplweb_wittmaneng.pdf a čerpá z literatury Wittmann, E.Ch.: Developing mathematics education in a systemic process. Educational Studies in Mathematics 48 (2002), 1-20.

- je flexibilní a může být přizpůsoben zvláštním podmínkám třídy

-integruje matematické, psychologické a pedagogické aspekty výuky matematiky a vytváří tak bohatou oblast pro empirický výzkum

První dva body zaručují, že je výuka skrze didaktické matematické prostředí pevně zakotvena jak v kurikulu, tak v elementární matematice (z "pokročilého hlediska"). Poslední bod zajišťuje, že proces vzdělání probíhá komplexním způsobem (kromě těch matematických se věnuje i pedagogickým a psychologickým aspektům výuky).

Během formování didaktického matematického prostředí je potřeba respektovat přirozený vývoj matematické činnosti. Výchozím bodem je tak vždy skutečná nebo matematická situace.

V první fázi je situace zakotvena v širším matematickém rámci. Následně jsou vyvstalé struktury zkoumány s cílem nalézt konkrétní matematické vzorce a řešení. V případě, že jsou předběžné vzorce různými zdroji potvrzeny, je potřeba, aby byly definovány a vysvětleny. Poslední fáze procesu spočívá ve sdělování výsledků jak ústně, tak i písemně.

Výše zmíněné čtyři body, jež dle Wittmanna definují didaktické matematické prostředí, přesně reflektují zmíněné fáze procesu. A to je důvod, proč jsou tak důležité. (Wittmann, 2002)

Hejný, na základě Wittmannových úvah, dodává, že *„prostředí jsou souborem vzájemně propojených pojmů, vztahů, procesů a situací.“* (Hejný, 2014, s. 13). Současně je to takový soubor, jež dovoluje tvořit úlohy, které žáky podněcují k odhalení hlubokých matematických myšlenek, jsou doprovázeny silnou motivací, jsou vhodné pro žáky jak prvního, tak druhé stupně, a jejich obtížnost je nastavitelná (Hejný, 2014, s. 13).

V Hejného metodě se pracuje se dvěma skupinami takových prostředí, a dělíme je z hlediska obsahu na aritmetická a geometrická.

U aritmetických skupin se dá ještě rozlišovat to, zda jsou sémantická či strukturální. Sémantická jsou prostředí, ve kterých žák při řešení úloh uplatní své předchozí zkušenosti, a protože vychází z reálného život, žák na ně může navázat. Takovým prostředím je třeba *Autobus, Biland, Cyklotrasy* nebo *Děda Lesoň*.

Naopak u úloh ze strukturálního prostředí žák ze své zkušenosti již nevychází, při řešení pracuje s číslem jako takovým. Mezi strukturální prostředí řadíme například *Algebrogramy, Hady, Pavučiny či Stovkovou tabulku.*

U dělení aritmetický prostředí je také potřebné zmínit, že u některých prostředí v průběhu probíhá k desémantizaci[6]. Tento proces můžeme pozorovat v prostředí *Krokování* nebo *Součtových trojúhelníků.*

Geometrická prostředí dělíme na základě toho, v jakém prostoru se v úlohách pohybujeme. Máme dvě skupiny geometrických prostředí, a to prostředí v 2D nebo 3D prostoru. Mezi prostředí, která řadíme do 2D prostoru, patří prostředí *Čtvercová mříž*, *Dřívka*, *Geodeska* nebo *Parkety*. Prostředím, ve kterém se pracuje ve 3D prostoru, jsou například *Krychlové stavby.*

1.3 Shrnutí

Cílem této kapitoly bylo představení dvou edukačních stylů – transmisivního a konstruktivistického – jež se na pomyslné škále ocitají na opačných koncích.

Transmisivní pojetí výuky je charakteristické dominantní pozicí učitele, jenž řídí hodinu a je zdrojem informací, které žáci pouze pasivně přijímají. Tradiční způsob výuky je organizovaný proces, jehož cílem je především žákův výsledek a úspěch, zatímco na rozvoj žákovy osobnosti není dostatek času. Nedostatek prostoru zároveň způsobuje to, že veškeré žákovo poznání je urychleno, což často vede k formalismu.

Konstruktivistické pojetí výuky naopak staví roli učitele do pozadí, učitel v žáka vkládá důvěru a podporuje ho v tom, aby byl ve výuce především aktivním účastníkem on sám. Díky tomu si žák poznatky osvojuje na základě vlastní zkušenosti. Cílem výuky je tedy především žákův rozvoj a to, jak konstruuje své vlastní poznání, jež je doprovázeno

---

[6] Desémantizace je „*proces, kdy dochází k přechodu od sémantického vnímání úloh (= odstraňování prvků, jež nesou sémantické ukotvení), k jejich znakovému vnímání, jež je spojeno se zaváděním prvků, jež napomáhají formalizovanému vnímání úlohy. Změna probíhá jak na úrovni zápisu, tak na úrovni řešitelského procesu*“ (Hejný, 2014, s. 18).

radostí. Tento přístup je zároveň prevencí formalismu, jelikož žák poctivě prochází jednotlivými etapami poznávacího procesu.

Na závěr bych chtěla představit tabulku (Tabulka 1), která shrnuje stěžejní rozdíly mezi výše zmíněnými vyučovacími styly.

Obsah tabulky se zároveň promítne v empirické části mé diplomové práce. Během zavádění nového prostředí jsem se snažila zmíněné zásady konstruktivistického pojetí výuky následovat, a z toho důvodu se k tabulce v kapitole 3.7 znovu vracím, abych posoudila, jak se mi to dařilo.

Tabulka 1 – Polarita konstruktivistického a transmisivního

	polaritní dipól	konstruktivistické vyučování	transmisivní vyučování
1	hodnota poznání	kvalita	kvantita
2	motivace	vnitřní	vnější
3	trvanlivost poznání	dlouhodobá	krátkodobá
4	vztah učitel-žák	partnerský	submisivní
5	klima	důvěry	strachu
6	nositel aktivity	žák	učitel
7	činnost žáka	tvořivá	imitativní
8	poznatek žáka	produktivní	reproduktivní
9	nosná otázka	CO? a PROČ?	JAK?

(zdroj: Hejný, Stehlíková, 1999, s. 33)

2 Číselné soustavy

„Soustavy používaných znaků společně se způsobem jejich zápisu se nazývají číselné neboli numerační soustavy“ (Bělík, 1999, s. 4). Tyto numerační soustavy se dělí na poziční a nepoziční.

„U nepoziční číselné soustavy není rozhodující, v jakém pořadí znaky píšeme, podstatná je pouze jejich hodnota. Číslo je pak dáno součtem hodnot všech znaků. Takové soustavy jsou nazývány jako aditivní nepoziční soustavy.“

*„Namísto znaku IIIII se napíše znak Z. Poté množství IIIII II můžeme zapsat jako ZII, nebo IIZ anebo IZI“ (*Vantuch, Bereková, 1990, s. 98).

Konečná hodnota se získá sečtením všech znaků a jejich pořadí není rozhodující.

Jako typického představitele aditivní nepoziční soustavy Vantuch a Bereková uvádějí egyptskou soustavu, ale za nejznámější nepoziční soustavu, i přesto, že není čistě aditivní, považují soustavu římských číslic (Vantuch, Bereková, 1990, s. 99).

Zde stojí za pozornost názor Bělíka, jenž soustavu římských číslic nezařazuje čistě do nepozičních soustav, ale chápe ji jako „*přechod od nepozičních číselných soustav k soustavám pozičním.“* Pokrok shledává v tom, že soustava používá již „*více různých znaků, jež jsou v zápise jistým smyslem kombinovány*." Zároveň upozorňuje na to, že zde již záleží na poloze znaku, což demonstruje na zápisech VI a IV. Poukazuje na fakt, že ačkoli „*se v obou zápisech objevují stejné znaky, o jejich významu rozhoduje jejich umístění – pozice*“ (Bělík, 1999 s. 5).

Poziční soustava se dle Bělíka „*nazývá poziční tehdy, když význam téhož znaku (číslice) závisí na jeho umístění (pozici) v zápise čísla*“ (Bělík, 1999 s. 5).

Každá poziční soustava je definována svým základem, což je povětšinou celé číslo větší než jedna. Základ udává maximální počet číslic, se kterými soustava pracuje, a zároveň se z něj vyvozuje název soustavy. Nejběžnější je desítková soustava.

Přirozená čísla obvykle zapisujeme v tzv. číselné soustavě o základu deset neboli dekadické číselné soustavě na základě věty:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,$$

kde $n \in N_0, a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ jsou některé z číslic 0, 1, 2, ... 9, přičemž $a_n \neq 0$.

Ačkoli je dekadická soustava tou nejběžnější, často se pracuje i s jinými pozičními soustavami. Především v prostředí počítačových technologií je používána poziční číslicová soustava o základu dvě neboli dvojková (binární) číselná soustava. V této soustavě se přirozená čísla zapisují pomocí dvou číslic (cifer) 0 a 1 na základě věty:

Každé přirozené číslo *a* lze vyjádřit právě jedním způsobem v rozvinutém zápisu tvaru:

$$a = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$a = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_2 ,$$

kde $n \in N_0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ jsou některé z číslic 0, 1, přičemž $a_n \neq 0$ (tj. $a_n = 1$).

Obecně se v poziční číselné soustavě o základu z ($z \in N \setminus \{1\}$) neboli z-adické číselné soustavě přirozená čísla zapisují pomocí z znaků (arabských číslic, popřípadě číslic označených písmeny). (Polák, 2008, s. 55-58)

V souvislosti s poziční soustavou je nezbytné zmínit nulu. „*Symbol pro nulu je nutný, neboť udržuje číslice ve správné pozici (na správném místě)*“ (Jelínek, 1974, s. 37). Jelínek důležitost nuly demonstruje na příkladu, kdy po seskupení všech desítek do stovek žádná desítka nezbyde – tato situace se poté řeší použitím nuly – např. v čísle 205 (Jelínek, 1974, s. 37).

2.1 Vývoj číselných soustav

„*Naše poziční soustava zápisů čísel se vyvíjela pomalu po mnoho století. Nyní jsme na ni tak zvyklí, že mnohdy ani zplna nerozumíme tomu, jak s ní pracovat. Mnohé chyby žáků ve škole i dospělých lidí v životě, např. při dělení desetinných čísel, dokazují, že není všechno tak jednoduché a jasné, jak by se zdálo*“ (Jelínek, 1974, s. 41).

Jak praví Jelínek, na desítkovou soustavu jsme zvyklí a bereme ji jako samozřejmost. To způsobuje, že si mnohdy vůbec neuvědomujeme, na jakých principech je vybudována. Současně je těžké si uvědomit, že k podobě, ve které ji známe dnes, ji dovedl dlouhý a spletitý vývoj (Jelínek, 1974, s. 7). Abych snáze porozuměla tomu, jak se tento číselný systém vyvíjel, nahlédla jsem do historického vývoje číselných soustav a v následujících odstavcích ho, na základě Jelínkových slov krátce shrnu.

I přesto, že nemáme příliš zdrojů, můžeme lehce předpokládat, že matematika byla součástí života už jeskynních lidí. Zároveň je celkem jisté, že její role byla především praktického charakteru. Pro jeskynního člověka bylo stěžejní zjistit, kolik má jeho osada obyvatel a kdo má kolik ovcí. Tyto informace zaznamenávali pomocí zářezů. Jeden zářez reprezentoval například jednu ovci a přidáním dalšího se zaznamenalo o jednu ovci více. Při vysokém počtu ovcí se zářezy pro větší přehlednost začaly shlukovat.

Egypťané čísla zapisovali pomocí čárek, a i oni je posléze začali shlukovat. Shlukovali je do skupin po deseti. Pro nově vzniknutou skupinu, jež se skládala z deseti čárek, vytvořili jiný znak. V případě deseti nově vzniknutých skupin vytvořili další znak pro nově vzniknutou nadřazenou skupinu. Znaky tak vznikaly opakovaným sdružováním.

Sumerské národy z Mezopotámie používaly k zápisu hliněné destičky a specifický znak ve tvaru klínu. Klín reprezentoval číslo jedna a až do čísla devět se způsob zápisu nelišil. A stejně jako Egypťané, Sumerové pro číslo deset zavedli nový znak, tentokrát dva spojené klíny. Zlomový moment nastal, když tento způsob od Sumerů převzali Babyloňané. Ti při zápisu čísla většího než 59 užívali soustavu se základem 60, čímž se stali prvními, kdo užili poziční soustavu. Jeden znak tak mohl znamenat 1 nebo 60, což bylo rozlišeno jeho umístěním. To, že babylonská numerační soustava byla vybudována na dvou základech – desítky a šedesátky – jim umožnilo zapisovat i velká čísla. I když si to tehdy nejspíš neuvědomili, učinili velký objev – poziční numerační soustavu. Orientace v zápise byla celkem snadná, až na místa, kde bychom my použili nulu. Babyloňané se totiž s nulou jako číslem nepotkali, což zapříčinilo, že pro ni nevytvořili žádný znak. Byli si však tohoto nedostatku vědomi a snažili se s ním bojovat – do zápisu vkládali různá znamínka a mezery, což ale často působilo chaoticky, a čtení zápisů je proto nejisté. (Jelínek, 1974, s. 17-31)

Na Jelínkův historický přehled navazuje Vanuch a Bereková, kteří doplňují, že i přesto, že staří Indové zprvu také používali nepoziční desítkovou soustavu, bylo to právě v Indi, kde došlo ke spojení desítkového systému a poziční soustavy. Tento systém se poté rozšířil prakticky do celého světa, a proto se dnes tato celosvětově používaná soustava nazývá „arabské číslice" (Vantuch, Bereková,1990, s. 101). Arabské slovo „*as sifra*", jehož význam se překládá jako „prázdno", symbolizuje „*nejnápadnější znak poziční soustavy, nulu. Nula dostala jméno podle latinského „nulla figura", co se překládá jako „žádný tvar"* (Vantuch, Bereková, 1990, s. 101).

2.2 Výuka pozičních soustav

2.2.1 Přínosy jiných pozičních soustav ve výuce

Jak vyplývá z kapitoly 2.1, proces vývoje desítkové soustavy byl dlouhý a náročný. Pochopitelně je nemožné s žáky celý vývoj soustavy procházet, na druhou stranu, že fakt, že se žák ve škole „*setkává již s hotovým výsledkem hned na začátku svého matematického vzdělávání, si říká o kritické přehodnocení*" (Hejný a kol., 1990, s. 104).

Hejný dodává, že se „*domnívá, že právě v tomto ontogenetickém skoku je nutné hledat příčinu formálnosti znalostí algoritmu základních početních úkonů, především násobení a dělení.*" Vysvětluje, že „*jelikož žák není připraven pochopit podstatu algoritmů, přebírá je pouze formálně – osvojuje si jako recepty"* (Hejný 1990, s. 104). Z toho důvodu již v 60.letech započal boj s formalismem[7]. Hejný řešení problému formalismu vidí ve zpomalení zavádění desítkové soustavy. Podotýká, že je důležité žákům nabídnout široké

[7] Problematice formalismu se věnuje kapitola 1.1.

spektrum separovaných modelů[8], pomocí níž žáci vnímají čísla a operace s nimi (Hejný 1990, s. 105).

Svou domněnku chtěl Hejný potvrdit, a proto se rozhodl uskutečnit experiment v 6. ročníku, jehož teze zněla: *„Je potřeba rozšířit žákovské zkušenosti s ideou poziční soustavy“* (Hejný, s. 105, 1990).

K realizaci experimentu už zbývalo jediné, a sice najít způsob, jak do problematiky zasvětit žáky. Což se záhy vyřešilo motivační pohádkou o Jankovi Hraškovi, jíž se podrobně věnuje kapitola 2.2.1.

Přínosy výuky jiných pozičních soustav potvrzuje i Bogomolny[9]. Shledává je ve následujících třech bodech.

Zaprvé, upozorňuje na fakt, že k sestavení správného konceptu nestačí pouze jeden nebo dva modely. Naopak (stejně jako Hejný) tvrdí, že je nutné mít širokou nabídku modelů, a v této souvislosti poukazuje na to, že desítková soustava je pouze jedním takovým modelem z celého konceptu číselných soustav.

Druhý argument podtrhuje skutečnost, že různé objekty nesou často více než jednu podobu. Například funkce může být znázorněna několika způsoby – grafem, funkčním předpisem či tabulkou. A totéž platí i pro čísla, jelikož i ta se vyskytují ve více podobách – číslo jako veličina či adresa[10].

Posledním argumentem je ten, že výuka různých pozičních soustav je celkově bohatým zdrojem pro matematické nástroje a uvažování, a nabízí žákům prostor pro objevování matematických zákonitostí (Bogomolny, 1990).

Se všemi výše zmíněnými důvody se naprosto ztotožňuji. Závěrem bych chtěla ještě zmínit ještě jeden poznatek. K tomu, aby se pracovalo i s jinými soustavami, dle mého názoru, vede fakt, že dnešní doba je bezesporu dobou informační technologie.

[8] Separovaný model je jednou z fází poznávacího procesu, jemuž se věnuje kapitola 1.1.

[9] Tyto tři důvody Bogomolny uvádí ve článku, jež se zabývá výukou pozičních soustav, jež je dostupný online na https://www.cut-the-knot.org/ctk/SelfDescriptive.shtml._[cit. 2018-04-26]

[10] Tuto zkušenost žákům prostředí Biland nabízí, více se této problematice věnuje kapitola 2.3.1.

A ta je konkrétně na binární soustavě založena. Dnešní děti již v brzkém věku běžně surfují na internetu a práce s počítačem je pro ně úplnou samozřejmostí. Programování se tak stává nedílnou součástí výuky, a proto i z toho důvodu shledávám výuky dvojkové soustavy za velmi přínosnou.

2.2.2 Pojetí výuky pozičních soustav – Motivační pohádka o Jankovi Hraškovi

Motivační pohádka vypráví o Jankovi Hraškovi, z jehož obyčejné cesty s obědem se po chvíli stává dobrodružná expedice. Janko se doplaví na souostroví Biland a Triland. Kromě toho, že jsou tamní lidé odlišní tím, že s okolním světem komunikují skrze speciálně vycvičeného delfína, tou nejpodivnější věcí je jejich způsob počítání. V Bilandu počítají ve dvojkové soustavě a v Trilandu v trojkové. Do problematiky žáky vnáší dopis, který Janko posílá svému otci[11]:

„Predstav si len, otec, že by si čítal v novinách takýto nápis: Slovan – Inter 10:1, a podnadpis: „Slovan vyhral najtesnejším rozdielom“. Alebo si predstavte, že by vám povedali, že pracovný čas je denne 100 hodín a že zaň dostanete 1001110 bigrošov. Je pochopiteľné, že som z takejto matematiky bol spočiatku veľmi vyplašený. Neskôr som to pochopil a dnes mi už takéto počítanie nerobí ťažkosti i keď si stále musím ich počty prekladať do našich normálnych počtov. Najlepšie sa tunajšie počítanie pochopí na ich peňažnom systéme. Ten je prehľadný. Základom ich meny je bigroš, či presne povedané abigroš, skratka abiš. Za dva abiše dostaneš bebiš, za dva bebiše zasa cebiš., za dva cebiše jeden debiš atď. Môj týždenný plat je ibiš, čo sa rovná 256 abišom. Avšak slovo „dvestopäťdesiatšest“ tu nepoznajú. Oni poznajú iba dve cifry a to „nula“ a „jedna“, či lepšie povedané „nič“ a „raz“, ako tu hovoria. Na svoje počty majú šikovné počítadlá, pomocou ktorých zručne rátajú“ (Hejný, 1990, s. 106).

Z příběhu se žáci dozvídají, jaké vztahy platí mezi jednotlivými mincemi a naráží na pravidlo, pomocí kterého Jankovi v Bilandu prodavači vrací – vždy jen od každé mincí jednu. Místo 7 abišů mu pokladník vrátí tři mince – cebiš, bebiš a abiš. „*Vysvitlo, že*

[11] Pro zachování autentičnosti jsem se rozhodla ponechat motivační pohádku v původní verzi, a sice ve slovenštině.

v Bilande je veľmi nezdvorilé platiť ináč, ako najmenším možným počtom mincí“ (Hejný, 1990, s. 106).

Dalším bilandským pravidlem je to, že používají pouze dvě číslice – jedničku a nulu, a že při počítání používají počítadla, se kterými i sami žáci ze začátku pracují. Počítadla jsou velkou oporou při převádění hodnot do dvojkové soustavy. Posléze se setkávají s úlohami, ve kterých sumy sčítají či odčítají (Hejný 1990, s. 105-107).

Experiment Hejnému jeho myšlenku potvrdil. Žáci, díky Jankově příběhu a celkovým způsobem výuky, nabyli spoustu zkušeností s dvojkovou soustavou. Jejich znalosti tak nebyly pouze formálního charakteru, ale naopak byly založeny na zkušenostech a opřeny o jejich vlastní představy.

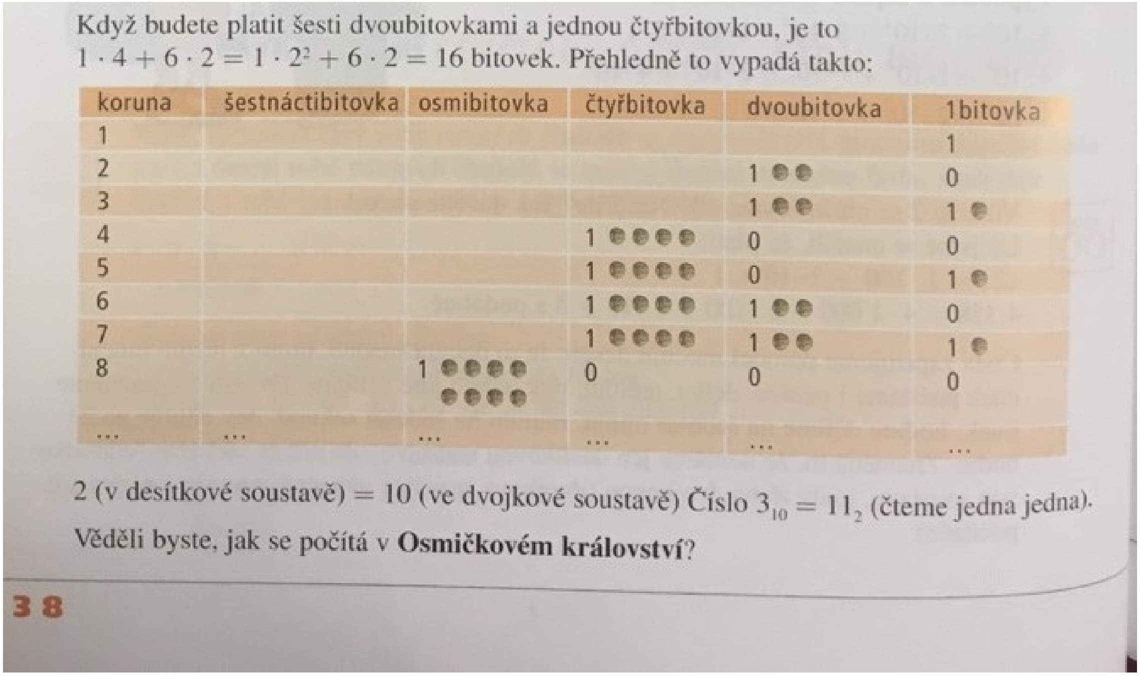
2.2.3 Výuka pozičních soustav v dnešních učebnicích matematiky

Během psaní této diplomové práce jsem se rozhodla projít různé učebnice matematiky a podívat se, zda některá z nich nabízí žákům problematiku pozičních soustav. Toto téma se téměř v žádné učebnic nevyskytuje. Mezi učebnicemi pro první stupeň jsem ho našla pouze v edici učebnic matematiky (pro 2. až 5. ročník) od nakladatelství FRAUS (Hejný, Jirotková, Slezáková Kratochvílová, Michnová, 2008-2011). S poziční dvojkovou soustavou se žáci seznamují v rozmezí od druhého do pátého ročníku v matematickém prostředí Biland, kterému se budu podrobněji věnovat v kapitole 2.3.

Po delším pátrání jsem objevila další učebnici, která se výuce pozičních soustav věnuje, a sice učebnice *Matematika 8, Aritmetika* (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009). S touto učebnicí se však žáci setkávají až na druhém stupni v osmém ročníku.

Kolektiv autorů žákům prostřednictvím dívky Báry představuje různé číselné soustavy – od římských číslic, přes nepoziční egyptský systém a klínový zápis v Mezopotámii až po Inky. Po krátkém ohlédnutí do historie se žáci setkávají s dvojkovou soustavou, která je hojně využívána především v počítačovém světě. (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009, s. 5-8)

O několik stran později, na straně 38 v kapitole *Mocniny a odmocn*iny, se žáci dozvídají, že desítková soustava, která je nám dobře známa, není jediná soustava, která existuje. Dozvídají se o tzv. Pětkovém království, ve kterém je nařízeno, že se mohou všechna čísla vyjadřovat pomocí pouze pění číslic a to 0, 1, 2, 3 a 4. Kromě Pětkového království se dozvídají o Dvojkovém království, v němž platí obdobné pravidlo, akorát výběr číslic je omezen na dvě – 0 a 1. Místo korun zde platí mincemi, jež jsou nazývány bity. Vztahy mezi mincemi jsou přehledně znázorněny v tabulce, která se nachází na obrázku 1.



Když budete platit šesti dvoubitovkami a jednou čtyřbitovkou, je to $1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 1 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 16$ bitovek. Přehledně to vypadá takto:

koruna	šestnáctibitovka	osmibitovka	čtyřbitovka	dvoubitovka	1bitovka
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
...	...	...	...	...	...

2 (v desítkové soustavě) = 10 (ve dvojkové soustavě) Číslo $3_{10} = 11_2$ (čteme jedna jedna).
Věděli byste, jak se počítá v **Osmičkovém království**?

38

Obrázek 1 (zdroj: Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009, s. 38)

2.2.4 Výuková aplikace „Bilandské dobrodružství“

V rámci rešerše jsem objevila diplomovou práci[12] studenta Marka Dvorožňáka, jenž se ve své práci, pod vedením paní doktorky Heleny Binterové, která je zároveň autorkou

[12] Diplomová práce Marka Dvorožňáka s názvem *Výuka pozičních soustav na ZŠ*, online dostupná na https://theses.cz/id/yxcezl/DP_-_Interaktivni_vyuka_pozicnich_soustav_na_ZS_-_Marek_D.pdf [cit. 2018-02-05]

výše zmíněné učebnice, věnoval výuce pozičních soustav. Tuto výukovou aplikaci s radostí uvádím do své diplomové práce, jelikož mě velmi potěšilo, že nejsem jediná, kdo se zajímá o zavedení dvojkové soustavy do výuky matematiky. Dvorožňák ve své práci propojil matematický svět se světem technologií, a vytvořil tak počítačovou aplikaci, která žáky provází světem dvojkové soustavy zábavnou formou. Počítačové prostředí je v dnešní době pro žáky velmi atraktivní, a proto mě tato kombinace matematiky a interaktivního vyučování zaujala. Dvorožňák navázal na Hejného a při tvorbě vycházel z příběhu o Jankovi Hraškovi.

Žáci, za Honzova (Honza je „český Janko") doprovodu, čelí různým úkolům, a skrze jejichž plnění se seznamují se vztahy mezi jednotlivými mincemi (abiše, bebiše atd). „*Dále se žáci seznamují s bilandským zvykem – platit nejmenším možným počtem mincí. Tato podmínka placení je klíčovou záležitostí pro řešení celé řady úloh a v dalších úrovních a je vlastně analogií zápisu čísla v poziční soustavě určitého základu*" (Dvorožňák, 2010, s. 41).

Další úlohy slouží k procvičení algoritmu převodu čísla z dvojkové soustavy do desítkové a naopak. Objevují se zde i úlohy, jež jsou zaměřeny na porovnávání a v neposlední řadě jsou zde i úlohy, ve kterých se žáci učí řešit základní početní operace – sčítání, odčítání, a dokonce i násobení a dělení.

Kromě jednotlivých úkolů, aplikace žákům nabízí také rady, jak přijít na správné řešení a dává žákům zpětnou vazbu. Jako velmi přínosné vnímám, že aplikace může sloužit pouze jako zábava pro žáka, ale zároveň také nabízí pomocnou ruku učiteli, jelikož má možnost jednotlivé výkony žáků sledovat.

2.3 Matematické didaktické prostředí Biland v učebnicích FRAUS

Z hlediska dělení jednotlivých prostředí v kapitole 1.2.1 se prostředí Biland obsahově řadí mezi aritmetická prostředí, jelikož v něm žák pracuje s čísly. V rámci skupiny aritmetických prostředí je Biland bezesporu prostředím sémantickým, protože hra na obchod je nedílnou součástí dětského světa, a tak prostředí navazuje na dětské prekoncepty a zkušenosti.

Prostředí Biland bylo vytvořeno na základě příběhu o Jankovi Hraškovi, kterému se více věnuje kapitola 2.2.1.

Biland je „*prostředí, ve kterém dochází k pohádkovému seznamování se s dvojkovou soustavou, jazykem, který používají počítače*“ (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2008, s. 12).

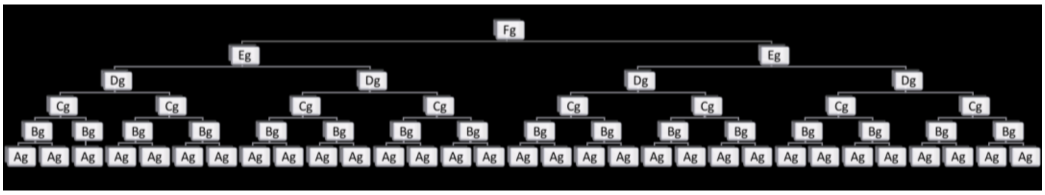
V této kouzelné zemi se platí bilandskými groši. Nejmenší hodnotu zde zastupuje A-groš, zkráceně Ag, poté následuje B-groš (Bg), C-groš (Cg), D-groš (Dg)[13] atp. Groše fungují na principu mocniny čísla 2. Zjednodušeně to můžeme vysvětlit tak, že každý groš je dvojnásobkem groše předchozího. Vztahy mezi mincemi můžeme pozorovat v tabulce 2. Tabulka zároveň ukazuje, jak hodnoty jednotlivých mincí stoupají – tabulka ukazuje, že zde platí posloupnost – mocniny čísla dvě. Vztahy mezi jednotlivými mincemi také můžeme sledovat na stromovém diagramu (obrázek 2).

Tabulka 2 – Vztahy mezi bilandskými groši a mocninami čísla dvě

Bilandské groše	Mocnina čísla 2
1 Ag	$1= 2^0$
1 Bg= 2 Ag	$2 = 2^1$
1 Cg = 2 Bg = 4 Ag	$4 = 2^2$
1 Dg = 2 Cg = 4 Bg = 8 Ag	$8 = 2^3$
1 Eg = 2 Dg = 4 Cg = 8 Bg = 16 Ag	$16 = 2^4$
1 Fg = 2 Eg = 4 Dg = 8 Cg = 16 Bg =32 Ag	$32 = 2^5$

(zdroj: Tereza Vybíralová)

[13] V práci budou dále pro groše použity zkratky: Ag = A-groš, Bg= B-groš, Cg = C-groš, Dg = D-groš, Eg = E-groš, Fg = F-groš.



Obrázek 2 – Stromový diagram, objasňující vztahy mezi jednotlivými mincemi.

(zdroj: Tereza Vybíralová)

Ačkoli to může být překvapivé, totožný princip můžeme shledávat v hodnotách hudebních not. I zde platí pravidlo, že hodnota noty je dána dvojnásobkem hodnoty předchozí noty. Na vrcholu pomyslného stromu se nachází nota celá. Ta se skládá ze dvou půlových not. Každá půlová nota se skládá ze dvou čtvrťových not. Což znamená, že nota celá je rovna dvěma půlovým notám nebo čtyřem čtvrťovým atp.

Pravidlo mocnin však není jediné, kterým se bilandské bankovnictví liší od toho našeho. V zemi existuje jistý zákon, jimž je dáno, že jakoukoli hodnotu můžeme vyjádřit pouze tak, že každý groš použijeme nanejvýš jednou. Což znamená, že když bychom v Bilandu chtěli vyjádřit částku 3 Ag, nepoužijeme k tomu číslici tři, ale částku vyjádříme jako Bg + Ag. Protože Bg má stejnou hodnotu, jako dva Ag, a to nám s přičtením jednoho Ag dá celkem tři Ag.

První střet s Bilandem probíhá ve druhém ročníku. Úloh v učebnici je pouze pět, přičemž všechny přispívají k porozumění vztahů mezi čtyřmi bilandskými mincemi – Ag, Bg, Cg a Dg.

Učebnice pro třetí ročník na předchozí učebnici plynule navazuje, a ke čtyřem základním mincím se přidávají další dvě– E-groš a F-groš. Objevují kombinatorické úlohy, a také úlohy, jež jsou zaměřeny na početní operace, a to především sčítání a odčítání. Dále je charakteristická také tím, že se v ní žáci poprvé setkávají s bilandským zákonem, kterým jsou posléze provázeni celou učebnicí. Tato základní myšlenka je stěžejní pro řešení úloh v učebnicích pro druhý a třetí ročník (podrobná analýza veškerých úloh ze druhého a třetího ročníku se nachází v kapitole 2.3.3). Tím však práce s prostředím nekončí. Naopak.

V následujících odstavcích nastíním, jaké další úlohy prostředí žákům přináší v dalších ročnících.

S učebnicemi pro čtvrtý ročník přichází obrovský zlom. Po krátkém zopakování bilandských grošů a vztahy mezi nimi, připadá na řadu seznámení s dvojkovou soustavou v její ryzí podobě. Žáci zjišťují, že v Bilandu se nepoužívají číslice od 0 do 9 jako je zvykem u nás. Jediné číslice, se kterými Bilanďané pracují, jsou jednička a nula. Kromě toho, že si žáci osvojují nový způsob zaznamenávání čísel, jež můžeme pozorovat v tabulce 3, se také dozvídají, že zápis 10 se v Bilandu nečte jako deset, nýbrž jedna nula, čímž se seznamují s jiným slovním vyjádřením čísla, než je v desítkové soustavě.

Tabulka 3 – Přehled grošů a jejich nominální hodnoty

Bilandský groš	F-groš	E-groš	D-groš	C-groš	B-groš	A-groš
Hodnota v A-groších	32 Ag	16 Ag	8 Ag	4 Ag	2 Ag	1 Ag
Mocniny čísla 2	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Dvojková soustava	100000	10000	1000	100	10	1

(zdroj: Tereza Vybíralová)

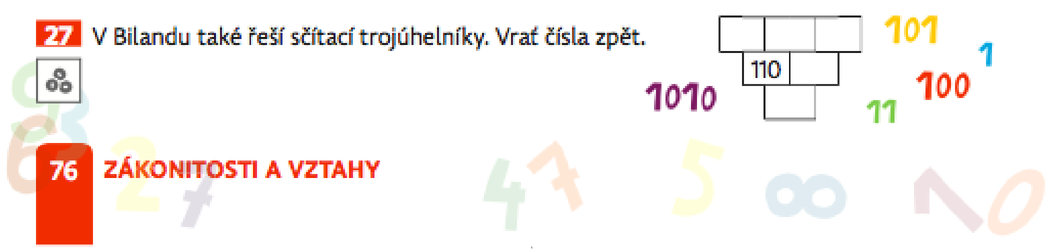
V tabulce 4 je objasněn vztah mezi jedničkami a nulami a přítomností jednotlivých grošů v peněžním obnosu na konkrétních částkách. Zápis probíhá vždy odzadu – zprava doleva. V případě, že se groš v obnosu objevuje, píšeme 1, pokud se tam nenachází, značíme jeho nepřítomnost 0.

Tabulka 4 – Převodní tabulka mezi groši a dvojkovou soustavou

Číslo v desítkové soustavě (= počet Ag)	Fg	Eg	Dg	Cg	Bg	Ag
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
10			1	0	1	0
15			1	1	1	1
20		1	0	1	0	0

(zdroj: Tereza Vybíralová)

O několik stran později jsou v učebnici zařazeny takové úlohy, ve kterých žák převádí groše na jedničky a nuly. V návaznosti na to se objevují úlohy, které vhled do systému jedniček a nul prohlubují. Už se nejedná o pouhý převod, ale úlohy žáky podněcují ke zkoumání číselné řady ve dvojkové soustavě. Úkolem je například najít největší či nejmenší dvojciferné bilandské číslo. Poslední úlohou, která určitě stojí za zmínku, je úloha na straně 76 (obrázek 3), kdy autoři učebnic propojili dvě prostředí – Biland a Sčítací trojúhelníky. Žáci řeší úlohu s bilandskými neposedy, kteří se rozutíkali ze sčítacího trojúhelníku, a jejich úkolem je vrátit neposedy zpět.



Obrázek 3 (zdroj: Hejný, Jirotková, Michnová, Bomerová, 2010, s. 76)

Se vstupem do pátého ročníku žáci s Bilandem pokračují. V učebnici najdeme úlohy, které žákům nabízí vhled do prostředí opět z jiného úhlu. Jejich úkolem není úlohu vyřešit, ale najít a opravit chybu v již vyřešené úloze. Tento způsob práce s úlohou je učí přemýšlet nad tím, jaká řešitelská strategie byla použita, a také se zamýšlí nad tím, kde a proč řešitel chyboval. Za zmínku určitě stojí strana 56 (obrázek 4). Problematika 1 a 0 z počítačového prostředí je přirovnávána k neuronovým buňkám v našem těle. Jsou pouze dva stavy, ve kterých se buňka nachází – spí anebo bdí (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008). Situaci, kdy buňka spí, kódujeme číslicí 0, případ buněčné bdělosti kódujeme číslicí 1. Stejný princip funguje při kódování v Bilandu. Pokud se v sumě daný groš nenachází, kódujeme ho 0, a jestliže se v sumě objevuje, kódujeme ho 1.

Biland a ciferník

Základním stavebním kamenem mozku je neuron. Je to buňka, která buď *spí*, nebo *bdí*. Obrovské množství těchto buněk (u člověka asi 50–100 miliard) je propojeno 1 000násobně větším množstvím *drátů*. Tento velice složitý systém nám umožňuje vnímat, mluvit, hýbat se i řešit matematické úlohy.
Podobně pracují i počítače. I zde je propojeno mnoho *buněk* a každá v každém okamžiku buď *spí*, tzn. neprochází jí proud (to kódujeme číslicí 0), nebo *bdí*, tzn. proud jí prochází (to kódujeme číslicí 1).
Pomocí dvou takových *buněk* můžeme kódovat čtyři čísla 0, 1, 2 a 3:
číslo 0 = kód 00; číslo 1 = kód 01; číslo 2 = kód 10; číslo 3 = kód 11.
Když máme pět takových *buněk*, můžeme kódovat čísla od 0 do 31:

číslo	Jeho kód	číslo	Jeho kód	číslo	Jeho kód	číslo	Jeho kód
0	00000	8	01000	16	10000	24	11000
1	00001	9	01001	17	10001	25	11001
2	00010	10	01010	18	10010	26	11010
3	00011	11	01011	19	10011	27	11011
4	00100	12	01100	20	10100	28	11100
5	00101	13	01101	21	10101	29	11101
6	00110	14	01110	22	10110	30	11110
7	00111	15	01111	23	10111	31	11111

S tímto způsobem zápisu čísla, kterému říkáme dvojková soustava, jsme se setkali v pomyslné krajině Biland. Tam se platí groši. Nejmenší hodnotu má A-groš, za dva A-groše je jeden B-groš, za dva B-groše jeden C-groš, ..., za dva K-groše jeden L-groš, ... Například hodnotu 10 A-grošů lze platit jako D-groš + B-groš a hodnotu 25 A-grošů lze platit jako E-groš + D-groš + A-groš. Marek řekl, že to lze vyčíst z horní tabulky.

1 Jak Marek dokáže vyčíst z horní tabulky uvedené dva vztahy?

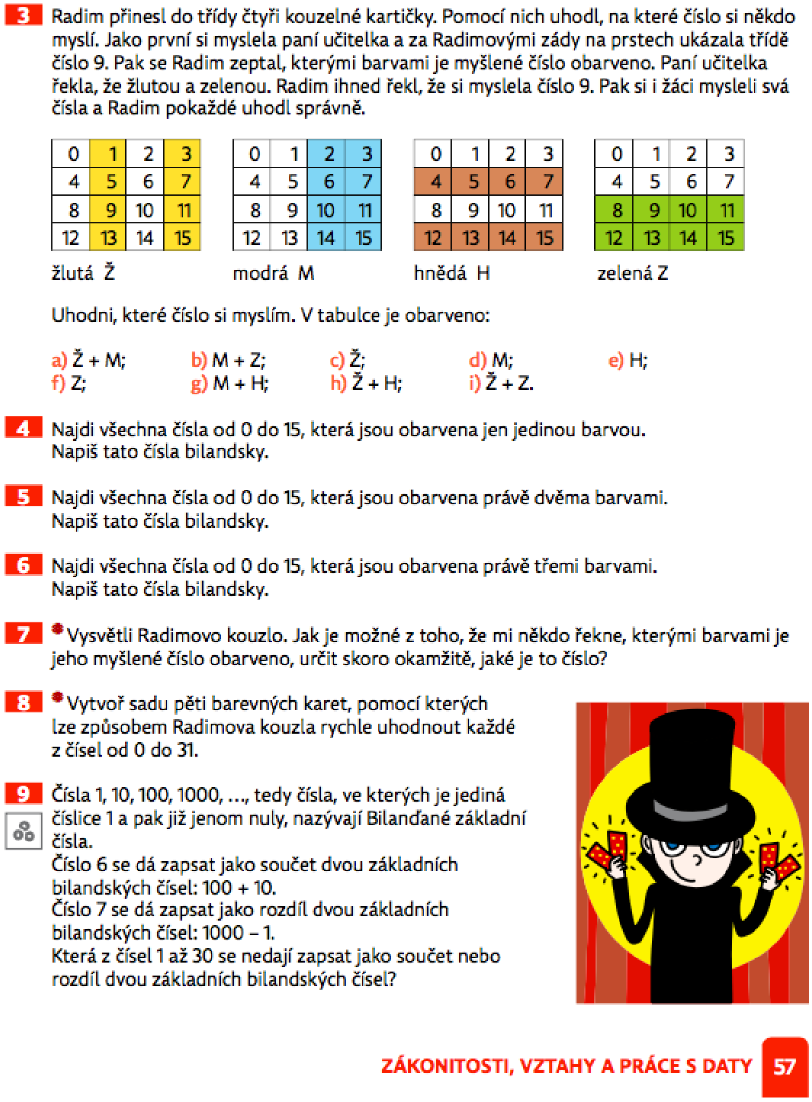
2 Vypočítej bilandsky, tedy ve dvojkové soustavě.

101 + 1	10010 – 1001	10101 – 1001 + 110
111 + 10	1 + 10 + 100	11111 + 1111 + 111
110 – 1	101 – 1 + 10	10000 – 111 – 1111
1001 – 10	11 + 11 + 11	110011 + 101010 + 1

56 ZÁKONITOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY

Obrázek 4 (zdroj: Hejný, Jirotková, Michnová, Bomerová, 2011, s. 56)

Stejně jako ve čtvrtém, tak i v pátém ročníku, najdeme na straně 57 úlohu, která Biland spojuje s dalším prostředím (obrázek 5). Tentokrát je tím prostředím Stovková tabulka. Ačkoli se v učebnici nepracuje s celou Stovkovou tabulkou, kouzlo, s nímž se v úloze setkáváme, je aplikovatelné na celou tabulku. Kouzelník z několika tabulek, v nichž jsou čísla různým způsobem barevně vyznačena, dokáže vyčíst, na které číslo myslíte. V návaznosti na tuto úlohu žáci řeší ještě několik dalších úloh, které jim má pomoci si kouzlo osvojit. Poslední úlohy se zaměřují na bilandskou číselnou řadu, čímž cílí k lepší orientaci v číselné řadě dvojkové soustavy.



3 Radim přinesl do třídy čtyři kouzelné kartičky. Pomocí nich uhodl, na které číslo si někdo myslí. Jako první si myslela paní učitelka a za Radimovými zády na prstech ukázala třídě číslo 9. Pak se Radim zeptal, kterými barvami je myšlené číslo obarveno. Paní učitelka řekla, že žlutou a zelenou. Radim ihned řekl, že si myslela číslo 9. Pak si i žáci mysleli svá čísla a Radim pokaždé uhodl správně.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

žlutá Ž

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

modrá M

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

hnědá H

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

zelená Z

Uhodni, které číslo si myslím. V tabulce je obarveno:

a) Ž + M; b) M + Z; c) Ž; d) M; e) H;
f) Z; g) M + H; h) Ž + H; i) Ž + Z.

4 Najdi všechna čísla od 0 do 15, která jsou obarvena jen jedinou barvou. Napiš tato čísla bilandsky.

5 Najdi všechna čísla od 0 do 15, která jsou obarvena právě dvěma barvami. Napiš tato čísla bilandsky.

6 Najdi všechna čísla od 0 do 15, která jsou obarvena právě třemi barvami. Napiš tato čísla bilandsky.

7 *Vysvětli Radimovo kouzlo. Jak je možné z toho, že mi někdo řekne, kterými barvami je jeho myšlené číslo obarveno, určit skoro okamžitě, jaké je to číslo?

8 *Vytvoř sadu pěti barevných karet, pomocí kterých lze způsobem Radimova kouzla rychle uhodnout každé z čísel od 0 do 31.

9 Čísla 1, 10, 100, 1000, ..., tedy čísla, ve kterých je jediná číslice 1 a pak již jenom nuly, nazývají Bilanďané základní čísla.
Číslo 6 se dá zapsat jako součet dvou základních bilandských čísel: 100 + 10.
Číslo 7 se dá zapsat jako rozdíl dvou základních bilandských čísel: 1000 – 1.
Která z čísel 1 až 30 se nedají zapsat jako součet nebo rozdíl dvou základních bilandských čísel?

ZÁKONITOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY 57

Obrázek 5 (zdroj: Hejný, Jirotková, Michnová, Bomerová, 2011, s. 57)

2.3.1 Biland ve vztahu k ostatním didaktickým matematickým prostředím

Porovnání, které se nachází v následujících odstavcích, jsem provedla proto, že bych ním ráda nastínila myšlenku izomorfismu. K tomuto srovnání mě dovedla poznámka z učitelské příručky k úloze (obrázek 6), jež upozorňuje na to, že *„jsou si úlohy velmi myšlenkově blízké“* a obě řeší problematiku *„vyjádření dané kvantity jiným počtem daných kvantit“*“ (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová 2008, s. 173*).*

Nejprve definuji pojem izomorfismus a pak popíšu, jak ho chápu ve vztahu k uvedené úloze.

Hejný myšlenku izomorfismu vyzdvihuje a podotýká, že *„jednou z nejdůležitějších schopností matematického orgánu je nacházet ve zdánlivě odlišných situacích společné jádro, tedy vidět to, co je v daných situacích stejné, vidět, že jsou v jistém smyslu izomorfní“* (Hejný, 2014, s. 151).

V Bilandu je klíčové to, že pracujeme s číslem ve dvou pozicích. Číslo zde figuruje v pozici počtu – udává počet mincí, a v pozici veličiny – udává hodnotu mincí. Zároveň jsou jednotlivé mince definovány svým názvem – A-groš, B-groš, C-groš atp.

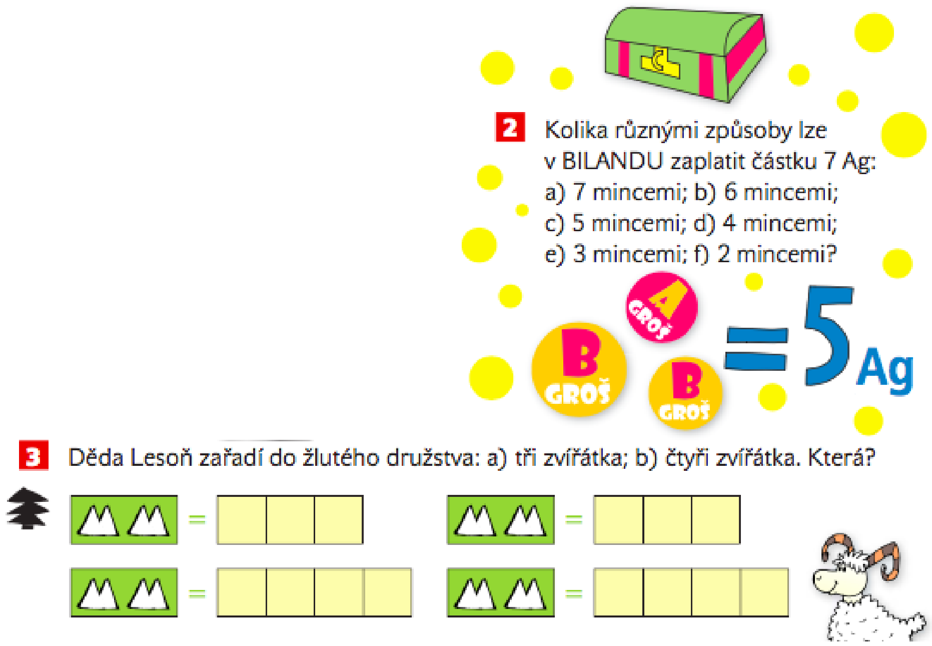
Stejné je to i v prostředí Dědy Lesoně, číslo jako počet figuruje při udávání počtu zvířátek, číslo jako veličina je v situaci, kdy zvažujeme zvířátka o různých silách. Zvířata jsou taktéž pojmenována – myš, kočka, husa atd.

Podobnost shledávám také v novém prostředí Vláčků.[14] V tomto prostředí číslo jako počet figuruje v počtu vláčků a jako veličina v jejich délce. Dále jsou jednotlivé vagonky definovány odlišnou barvou – bílá, zelená, oranžová.

V čem se jednotlivá prostředí odlišují, je prověřování rovnosti. Ta jediná lze manipulativně ověřit v prostředí Vláčků, a to tak, že postavíme jednotlivé vláčky vedle sebe. Pro kontrolu rovnosti v Bilandu musíme znát hodnotu mincí, jež je dána vztahy mezi nimi, a u Dědy Lesoně sílu zvířátek, jež je definována sílou jiných zvířátek. (Hejný, 2002)

[14] Prostředí Vláčků se nově objevuje v nových učebnicích H-mat, o.p.s., jež začaly vycházet v roce 2018.

Domnívám se však, že je trochu odvážné očekávat, že žáci v uvedených úlohách uvidí souvislosti. Prvním matoucím faktem je to, že v souvislosti nejsou celé úlohy. U bilandské úlohy se jedná pouze o část, a sice úlohy za d) a za e). Tím druhým je to, že každá úloha pracuje s jiným číslem. V Bilandu se žáci vypořádávají s rozkladem čísla 7 (částka 7 Ag), zatímco v případě úlohy z dědy Lesoně je úkolem rozložit číslo 8 (síla zvířátek je rovna číslu 8 – a to osmi myším).



Obrázek 6 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 44)

2.3.2 Prostředí Biland ve vztahu k RVP

Navzdory tomu, že se může zdát, že problematika binární soustavy na první stupeň nepatří, podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělání[15] má prostředí Biland v učebnicích své místo. Ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace jsou jasně stanoveny očekávané výstupy, a prostředí Biland bezesporu přispívá k jejich naplnění.

Jednotlivé výstupy jsou také k nalezení na posledních stránkách učebnic, a zároveň je u nich vysvětleno, jakými aktivitami dochází k jejich naplnění. Jelikož RVP rozděluje výstupy do dvou skupiny, na první a na druhé období, uvedu z obou období několik očekáváných výstupů, na kterých prokážu, že je prostředím Biland naplňovány. Za jednotlivými výstupy bude v závorce uvedená konkrétní situace, která je pro rozvoj výstupu typické.

První období pokrývá první až třetí ročník. I přesto, že se Biland objevuje až v polovině, přispívá k naplnění vícera očekávaných výstupů, a to rovnou v několika oblastech:

- *Žák používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daných souborech, vytváří soubory s určitým počtem prvků* (např. samotné hodnoty bilandských grošů a vztahy mezi nimi, aritmetické operace – sčítání a odčítání).
- *Čte, zapisuje a porovnává čísla do 1000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti* (např. porovnávání bilandských obnosů).
- *Řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojení početní operace* (např. kombinatorické úlohy – kolika způsoby můžeme daný obnos zaplatit).
- *Popisuje závislosti z praktického života* (např. práce s daty, organizace kombinatorických úloh).

(Hejný, Jirotková, Slezáková – Kratochvílová, Michnová, 2008-2009)

[15] Rámcový vzdělávací program, v textu je pro něj dále použita zkratka RVP. [cit. 2018-05-15]., dostupný online na: http://www.msmt.cz/file/43792/

Druhé období pokrývá čtvrtý a pátý ročník. A i v těchto ročnících Biland přispívá k naplnění očekávaných výstupů, opět několika oblastmi:

- *Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení* (např. sčítání jednotlivých obnosů)
- *Provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel* (např. převod záznamu z jednoho jazyka do jiného – práce s binární soustavou, jednotlivé operace, respektování bilandského zákona).
- *Řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel* (např. řešení kombinatorických úloh)

(Hejný, Jirotková, Slezáková – Kratochvílová, Michnová, 2008-2009)

Kromě očekávaných výstupů také přispívá k rozvoji žáků v dalších oblastech, jež jsou stanoveny průřezovými tématy. Prvním z nich je *Osobnostní a sociální rozvoj*. Toto průřezové téma hraje v Bilandu hlavní roli. Hra na obchod je sociální hra, která rozvíjí samostatnost žáků a zároveň podporuje jejich kooperaci ve skupině, což jsou klíčové hodnoty osobnostního a sociálního rozvoje.

Dalším průřezovým tématem je *Výchova demokratického občana*. Biland nabízí prostor pro diskuzi a vhodné prostředí pro rozvoj argumentace. Zároveň vyžaduje respektování názorů ostatních a konstruktivní argumenty.

Posledním průřezovým tématem, které má v Bilandu svou roli, je *Multikulturní výchova*. Žáci se dozvídají o zemi, kde fungují jiná pravidla, což vede k rozvoji tolerance vůči ostatním.

Další oblastí, pro kterou je Biland obohacující, je *finanční gramotnost*. Finanční gramotnost je dnes velmi skloňovaným tématem a Ministerstvo financí ji v dokumentu *Národní strategie finančního vzdělávání*[16] definuje jako:

[16]Definice finanční gramotnosti se nachází v souboru *Národní strategie finančního vzdělávání*. 2010. [cit. 2018-06-30]. Dostupné online na http://www.msmt.cz/file/31443_1_1/

„Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní/rodinný rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků s ohledem na měnící se životní situace" (Ministerstvo financí, 2010, s. 11)

Finanční gramotnost je v souvislosti s Bilandem samozřejmě úzce spojena s gramotností numerickou, což je dáno *„především využitím matematického aparátu k řešení numerických úloh se vztahem k financím*“ (Ministerstvo financí, 2010, s. 12)

K rozvoji finanční gramotnosti přispívá především aktivita, v níž probíhá *hra na obchod*, a to hned v několik jejich oblastech. Žáci si v rámci aktivity nákupem a prodejem pochopitelně osvojují vztahy mezi mincemi. Kromě toho jsou také vedeni k tomu, aby nad svou útratou uvažovali vzhledem k rozpočtu, který mají k dispozici.

Z jednotlivých zkušeností postupně vyvstávají další témata finanční problematiky, jež se žáci učí řešit. Jedním takovým tématem může být například půjčka. Do situace, kterou by půjčka vyřešila, se může dostat žák, který neuvážlivě utratí své peníze a nyní potřebuje další. Jiným tématem jsou například slevy. K této problematice se může dostat žák z pozice obchodníka. Jeho produkty jsou příliš drahé a žádný ze zákazníků si je již nemůže dovolit. Schůdným řešením pro obě strany je v tomto případě sleva. Dalším problémem může být okamžik, kdy prodavač nemá dostatek drobných mincí na to, aby mohl zákazníkovi vrátit, a z toho důvodu vyvstane potřeba zavedení banky, kde by si prodavači i zákazníci mohli své mince rozměňovat.

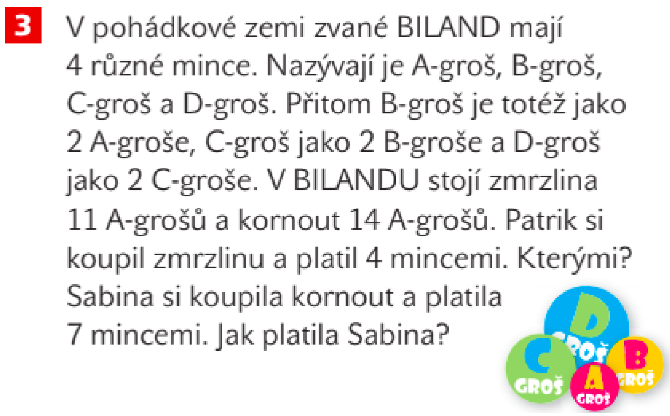
2.3.3 Mapování úloh z prostředí Biland v učebnicích (Hejný – FRAUS)

Analýzu nynějších učebnic jsem se rozhodla provést pouze v učebnici pro 2. a 3. ročník, a to z toho důvodu, že se v mé práci zabývám především zavedením tohoto prostředí a jeho počátky. Kromě učebnic jsem věnovala také pozornost informacím z metodické příručky pro učitele.

2. 3. 3. 1 Učebnice pro 2. ročník, 3. díl

Úloha na obrázku 7 je úplně první úlohou z prostředí Biland, se kterou se žáci v učebnici setkávají. Přichází ve druhém ročníku a najdeme ji ve třetím díle učebnice na straně 23. Ze zadání se žáci dozvídají o pohádkové zemi Biland, ve které mají 4 různé mince; A-groš, B-groš, C-groš a D-groš. Dále se v textu dočtou, jaké vztahy mezi jednotlivými mincemi platí. A následně jsou vyzváni k řešení kombinatorické úlohy. Žáci mají vyřešit, jakými mincemi děti zaplatily, jestliže Patrik za zmrzlinu, která stála 11 Ag, platil 4 mincemi, a Sabina za kornout za 14 Ag, zaplatila 7 mincemi (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2008b, s. 23).

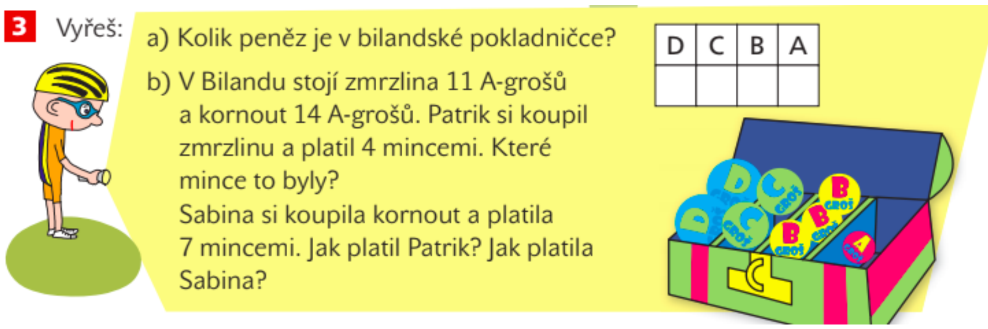
V příručce pro učitele toho o novém prostředí příliš není. Nenachází se zde žádná doporučení, jak prostředí zavést, v čem spočívá, ani jak s ním pracovat. Kromě správného řešení úlohy se dozvídáme, že se s Bilandem pokračuje až do pátého ročníku a že žákům otevírá pohled na dvojkovou soustavu (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 151).


3 V pohádkové zemi zvané BILAND mají 4 různé mince. Nazývají je A-groš, B-groš, C-groš a D-groš. Přitom B-groš je totéž jako 2 A-groše, C-groš jako 2 B-groše a D-groš jako 2 C-groše. V BILANDU stojí zmrzlina 11 A-grošů a kornout 14 A-grošů. Patrik si koupil zmrzlinu a platil 4 mincemi. Kterými? Sabina si koupila kornout a platila 7 mincemi. Jak platila Sabina?

Obrázek 7 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 23)

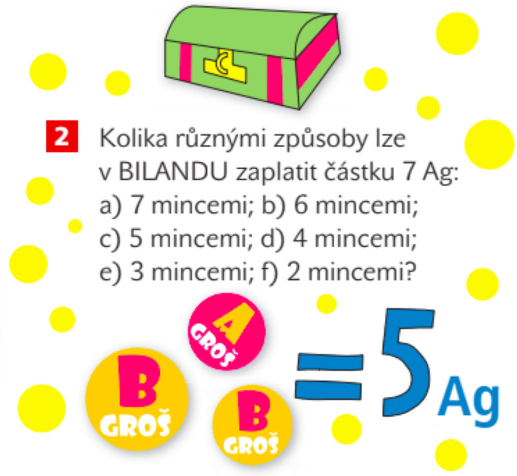
Druhá úloha (obrázek 8) se objevuje o několik stran později, na straně 27. Úloha je téměř totožná s úlohou ze strany 23 – zadání je stejné, dokonce obsahuje i stejné hodnoty mincí. Oproti první úloze je ale tato úloha členitější, skládá se ze dvou částí. První část je zaměřena na vyčtení informací z obrázku a záznam získaného do tabulky. Druhá část úlohy je již shodná s předchozí úlohou. Zde se zamýšlím nad tím, zda je uvedení dvou stejných úloh záměrem autorů.

V metodické příručce pro učitele jsou zaznamenána správná řešení. Kromě nich upozorňuje na možnost směňování mincí – 2 Dg za 4 Cg, ty pak vyměnit na nejmenší mince – Ag. Zároveň naráží na pravidlo mocnin – přesunem z přihrádky do nebližší pravé přihrádky se počet mincí zdvojnásobí. Ke cvičení b) žákům nabízí k řešení papírové groše (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 155).



Obrázek 8 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 27)

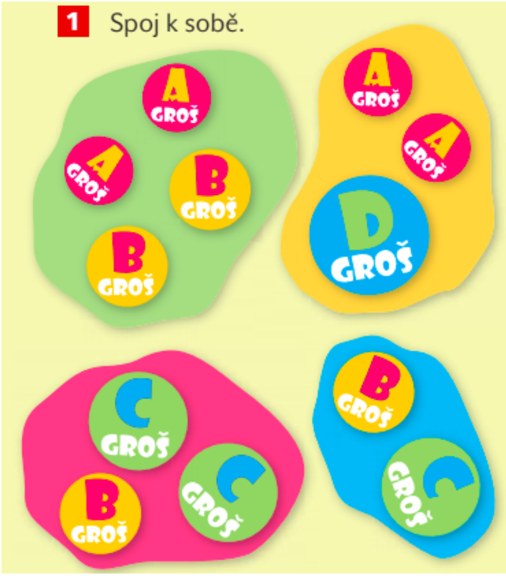
Poté je v učebnici dlouhá odmlka a další úloha se objevuje až na straně 44 (obrázek 9). Úkolem je zjistit, kolika způsoby lze v Bilandu zaplatit částku 7 Ag. Tato úloha je kombinatorické povahy. Žáci hledají různé kombinace mincí tak, aby se dala zaplatit daná částka. Zároveň je to série úloh s podmínkou, jež je dána počtem mincí. Učitelská příručka naráží na problematiku izomorfismu, jež je podrobněji zpracována v kapitole 2.3.1. této diplomové práce.



Obrázek 9 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 44)

V sekci *Opakování* se nachází další dvě úlohy, které slouží k zopakování vazeb mezi mincemi. Obě úlohy řeší otázku rovnosti a úkolem žáků je spojit bubliny, které mají stejnou hodnotu. První úloha (obrázek 10) na straně 55 ověřuje, zda žáci porozuměli základním vztahům mezi mincemi. Druhá úloha (obrázek 11) na straně 58 je obdobná, ale náročnější, protože v bublinách jsou mince různého typu. V každé bublině je více než jedna mince, tudíž má řešení dva kroky, nejprve je sečtením mincí potřeba zjistit hodnoty jednotlivých bublin a poté najít dvě stejné. K těmto úlohám už se žádné poznámky v učitelské příručce nenachází.

Těmito dvěma úlohami se zároveň prostředí v učebnici uzavírá. Celkem je tedy v učebnici 5 úloh, přičemž první dvě jsou téměř stejné.



Obrázek 10 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 55)

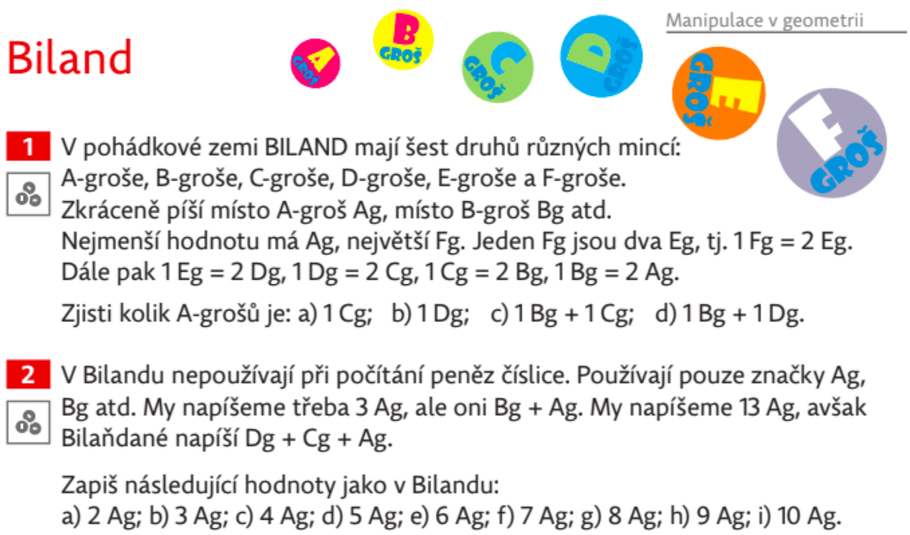
Obrázek 11 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2008, s. 58)

2. 3. 3. 2 Učebnice pro 3. ročník

První setkání s prostředím Biland ve třetím ročníku probíhá až na straně 49, ale zato rovnou ve dvou úlohách (obrázek 12). V první úloze se připomíná země Biland, ale místo 4 mincí se žáci setkávají rovnou s šesti mincemi – Ag, Bg, Cg, Dg, Eg a Fg, přičemž jednotlivé vztahy jsou explicitně dány a vyjádřeny tak, že groš je definován dvojnásobkem předchozího (Cg = 2Bg, Dg = 2Cg apod.) (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 49).

Druhou částí této úlohy je již převod jednotlivých obnosů na nejmenší mince Ag. Metodická příručka nabízí přehlednou tabulku, jež je obsahově totožná se stromovým diagramem (obrázek 2), a znovu doporučuje používat papírové mince, které umožní úlohy řešit manipulací. Navrhuje mince za pomocí práce s tabulkou směňovat za menší (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 65).

Druhá úloha přináší nové bilandské pravidlo, které praví, že v Bilandu při počítání peněz nepoužívají číslice. Uvádí dva příklady a ihned žáky vyzývá k tomu, aby si takový převod vyzkoušeli. V příručce se nachází pouze správné řešení úlohy.


Biland

Manipulace v geometrii

1 V pohádkové zemi BILAND mají šest druhů různých mincí:
A-groše, B-groše, C-groše, D-groše, E-groše a F-groše.
Zkráceně píší místo A-groš Ag, místo B-groš Bg atd.
Nejmenší hodnotu má Ag, největší Fg. Jeden Fg jsou dva Eg, tj. 1 Fg = 2 Eg.
Dále pak 1 Eg = 2 Dg, 1 Dg = 2 Cg, 1 Cg = 2 Bg, 1 Bg = 2 Ag.

Zjisti kolik A-grošů je: a) 1 Cg; b) 1 Dg; c) 1 Bg + 1 Cg; d) 1 Bg + 1 Dg.

2 V Bilandu nepoužívají při počítání peněz číslice. Používají pouze značky Ag, Bg atd. My napíšeme třeba 3 Ag, ale oni Bg + Ag. My napíšeme 13 Ag, avšak Bilaňdané napíší Dg + Cg + Ag.

Zapiš následující hodnoty jako v Bilandu:
a) 2 Ag; b) 3 Ag; c) 4 Ag; d) 5 Ag; e) 6 Ag; f) 7 Ag; g) 8 Ag; h) 9 Ag; i) 10 Ag.

Obrázek 12 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 49)

Další úloha se nachází hned na další straně (obrázek 13). Nyní je úkolem zjistit, jakou hodnotu má společné jmění chlapců a dané jmění vyjádřit bilandskými groši. (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 50) Zde žáci čelí sčítání dvou nebo tří bilandských hodnot. V příručce se nachází pouze správné řešení.

3 Tři kamarádi z Bilandu počítají své jmění. Adam má Cg + Ag, Boris Cg + Bg, Cyril Dg + Ag. Vyjádři bilandsky společné jmění: a) Adama s Borisem; b) Adama s Cyrilem; c) Borise s Cyrilem; d) všech tří dohromady.

Obrázek 13 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 50)

Bilandské dobrodružství pokračuje na straně 54 (obrázek 14). Zde přichází řada na další početní operaci, a tou je v tomto případě odčítání. Žáci od jistého základu odečítají jednotlivé útraty. Učitelská příručka opět uvádí pouze správné řešení.

4 V Bilandu jsem koupil v prvním obchodě limonádu, ve druhém míč a ve třetím kuličku. Pokaždé jsem dal prodavači Eg. V prvním obchodě mi prodavač vrátil Dg, ve druhém Cg + Ag, ve třetím Cg + Bg.
Kolik A-grošů jsem zaplatil za limonádu, kolik za míč a kolik za kuličku?

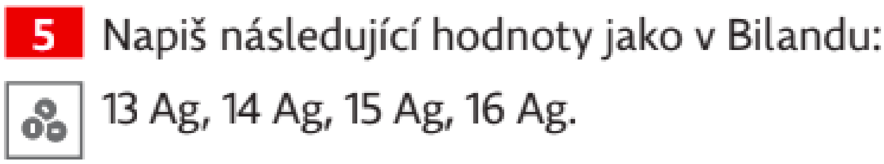
Obrázek 14 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 54)

Podobná úloha se nachází o několik stran později na straně 59 (obrázek 15). Úloha je zatížená na sčítání. Ani v tomto případě příručka nenabízí více než správné řešení.

4 Sečti dva bilandské obnosy:
a) Cg + Bg a Dg + Bg;
b) Dg + Bg + Ag a Bg + Ag;
c) Cg + Bg + Ag a Dg + Ag;
d) Eg + Dg + Ag a Dg + Ag.

Obrázek 15 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 59)

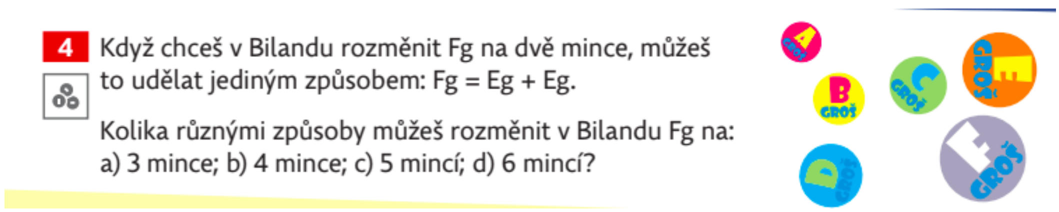
Následuje úloha na straně 61 (obrázek 16), která se vrací s úlohou, která se již objevila na začátku učebnice. Tentokrát je úkolem žáků respektovat bilandský zákon a zapsat bilandské hodnoty v souladu se zákonem. Vyjádření hodnot je opět potvrzeno v metodické příručce.


5 Napiš následující hodnoty jako v Bilandu:
13 Ag, 14 Ag, 15 Ag, 16 Ag.

Obrázek 16 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 61)

Úloha ze strany 71 (obrázek 17) je kombinatorického typu a vyzývá žáky k vyjádření obnosu F-groše různým počtem mincí.

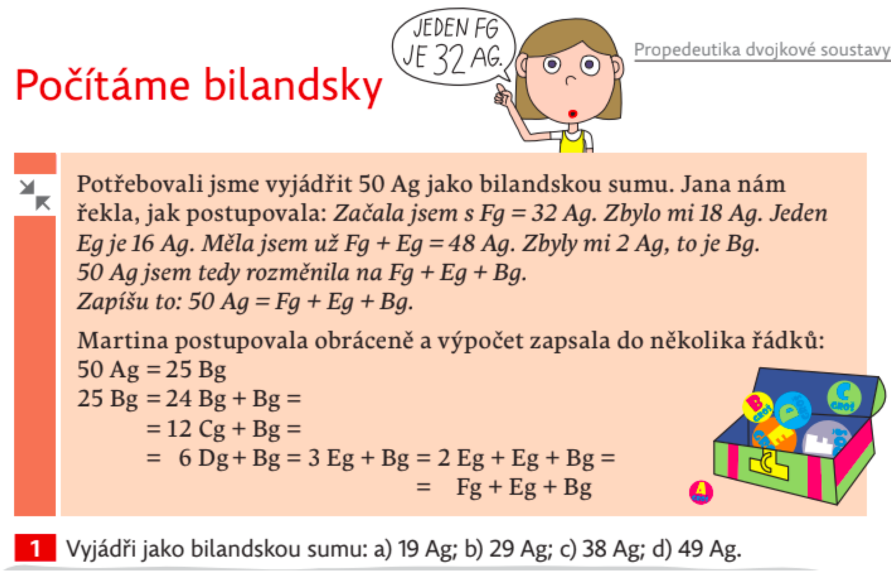
V tomto případě metodická příručka navrhuje se ve vyučování věnovat pouze prvním dvěma variantám, a ty další nechat žáky vypracovat pouze dobrovolně. Zároveň doporučuje řešení shromažďovat na nástěnce a upozorňuje na důležitost se občas k evidenci jednotlivých řešení vracet (Hejný, Jirotková, Slezáková Kratochvílová, Michnová, 2009).


4 Když chceš v Bilandu rozměnit Fg na dvě mince, můžeš to udělat jediným způsobem: Fg = Eg + Eg.
Kolika různými způsoby můžeš rozměnit v Bilandu Fg na:
a) 3 mince; b) 4 mince; c) 5 mincí; d) 6 mincí?

Obrázek 17 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 71)

. Na straně 79 (obrázek 18) se vracíme k úloze, ve které žáci převádí bilandské sumy na nejmenší mince. U této úlohy metodická příručka upozorňuje na zajímavost při řešení. Poukazuje na to, že jednotlivé výsledky jsou dvojnásobky výsledku předchozího (Hejný, Jirotková, Slezáková Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 94).

.



Počítáme bilandsky

Propedeutika dvojkové soustavy

Potřebovali jsme vyjádřit 50 Ag jako bilandskou sumu. Jana nám řekla, jak postupovala: *Začala jsem s Fg = 32 Ag. Zbylo mi 18 Ag. Jeden Eg je 16 Ag. Měla jsem už Fg + Eg = 48 Ag. Zbyly mi 2 Ag, to je Bg. 50 Ag jsem tedy rozměnila na Fg + Eg + Bg. Zapíšu to: 50 Ag = Fg + Eg + Bg.*

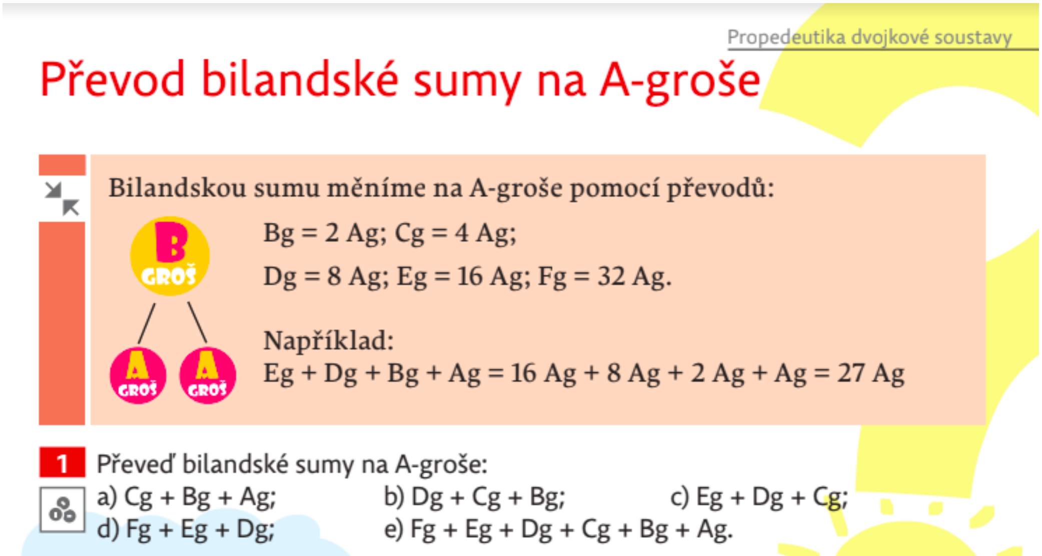
Martina postupovala obráceně a výpočet zapsala do několika řádků:

50 Ag = 25 Bg
25 Bg = 24 Bg + Bg =
= 12 Cg + Bg =
= 6 Dg + Bg = 3 Eg + Bg = 2 Eg + Eg + Bg =
= Fg + Eg + Bg

1 Vyjádři jako bilandskou sumu: a) 19 Ag; b) 29 Ag; c) 38 Ag; d) 49 Ag.

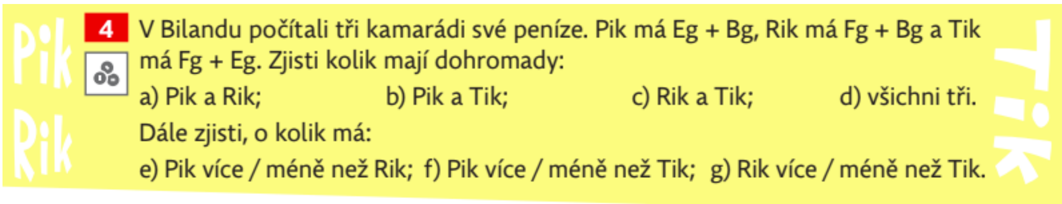
Obrázek 18 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 79)

O několik stran později opět přichází řada na bilandský zákon (obrázek 19). Žákům jsou představeny dva různé postupy, které dvě žákyně při převádění používaly. V prvním případě je popisován způsob, kterým úlohu řešila Jana. Jedná se o algoritmus postupného odčítání. Druhý, Martinin, postup navrhuje zahrnout do řešení dělení a zde uveden především proto, že v binární soustavě hraje klíčovou roli. Není však na žáky apelováno, aby úlohu řešili pouze tímto způsobem, je nabízen pouze jako alternativní postup (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 96).



Obrázek 19 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 81)

Závěrečnou úlohou v učebnici je úloha na straně 85 (obrázek 20) Opět nabízí operaci sčítání dvou a tří hodnot. Druhou částí úlohy je porovnávání jednotlivých obnosů.



Obrázek 20 (zdroj: Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009, s. 85)

2.3.4 Shrnutí

V kapitole 2.3.3 jsem pozorovala celkem 15 úloh. Z toho 5 jich najdeme v učebnici pro 2. ročník, zbylých 10 je zařazeno v učebnici pro třetí ročník. Zjišťovala jsem, jak jsou za sebou úlohy řazeny, jaké jsou mezi nimi rozestupy, a co je při jejich řešení po žákovi požadováno. Během analýzy jsem úlohy roztřídila do několika skupin.

V učebnici se objevují především úlohy na kombinatoriku (obrázky 6, 7, 8 a 17) a poté úlohy na rovnost a porovnávání (obrázky 9, 10 a 20).

Další úlohy zkoumají, jak si žáci poradí s jednotlivými početními operacemi (obrázky 13, 15 a 20 na sčítání, obrázek 14 na odčítání).

Posledním typem jsou takové úlohy, ve kterých hraje hlavní roli převádění. Můžeme rozlišit dva typy těchto úloh. Jedna skupina úloh (obrázky 11 a 18) je změřena na převod na nejmenší mince, tudíž je úkolem vyřešit, kolik je daná hodnota v Ag, ve druhé skupině úloh (obrázky 12, 16 a 19) je převod opačný, žáci zapisují hodnoty dle Bilandského zákona.

Kromě úloh jsem také charakterizovala jednotlivé příspěvky v učitelské příručce. Nejčastějším jevem bylo pouhé uvedení správného řešení.

Dalším typem byly didaktické komentáře. V několika případech se objevila rada, jak podpořit slabší žáky a usnadnit jim práci v novém prostředí. V tomto případě se povětšinou jednalo o doporučení práce s groši anebo tabulkou. (obrázek 7 a 11).

Jiné komentáře poukazovaly na podobnost mezi jednotlivými prostředími (izomorfismus u obrázku 8), navrhovaly další práci s prostředím (evidence řešení na nástěnce u úlohy na obrázku 17), nebo nabízely různé postupy při řešení (směňování mincí či manipulace s nimi u úlohy na obrázku 11, a u úlohy na obrázku 19 to byly odlišné algoritmy).

3 Empirická část

V empirické části se budu věnovat především experimentům, které jsem s prostředím Biland uskutečnila. Dobrodružství s Bilandem odstartovala má průběžná praxe z matematiky. S ní přišla má první praktická zkušenost s tímto prostředím. A poprvé to nebylo jen pro mě, ale rovnou i pro žáky, se kterými jsme do Bilandu společně vstupovali. Bohužel mě nenapadlo hodinu natáčet, tudíž z ní nemám žádný záznam, a při popisu vycházím pouze ze svých zápisků a vzpomínek. A i přesto, že se to tak tenkrát nejevilo, dnes tuto zkušenost beru jako součást své diplomové práce, a to jako předexperiment.

Další etapy mého experimentu byly již cílené a plánované. Jelikož jsem neměla svou první zkušenost s prostředím Biland zaznamenanou, rozhodla jsem se zavedení Bilandu zopakovat, dvakrát ve dvou různých třídách, abych mohla poté jednotlivé nahrávky porovnat.

Každý experiment trval jednu vyučovací hodinu, přičemž stěžejní částí je počátek hodiny, kdy společně s žáky vstupujeme do nového prostředí. Během celé hodiny jsem získala spoustu materiálů, zaznamenáno je především to, jak děti nakupovaly, pak jednotlivé interakce mezi dětmi, směňování peněz a diskutování o tom, zda dotyčný zaplatil správně či nikoli. Nicméně v této práci se budu věnovat pouze zavedení prostředí Biland. Poněvadž jsou získané materiály bohaté, uschovám je a budou případně sloužit k další práci.

Kromě toho jsem vytvořila pracovní listy, které byly posléze zadány žákům k vypracování. Popis pracovních listů a analýza žákovských prací bude druhou částí mého výzkumu.

Empirickou část jsem uzavřela realizací dotazníkového šetření mezi učiteli, které zkoumá vztah učitele k prostředí Biland, a jeho následným vyhodnocením.

3.1 Přehled experimentů

Všechny experimenty jsem uskutečnila osobně a proběhly v časovém úseku březen 2016 až únor 2018. Přehled organizovaných experimentů se nachází v tabulce 5.

Tabulka 5 – Přehled experimentů

Experiment	Datum	Ročník	Počet žáků	Záznam
Předexperiment	9. 3. 2016	3. ročník	24	Poznámky
Experiment č. 1	14. 12. 2017	3. ročník	21	Video záznam, protokol P1, pracovní listy
Experiment č. 2	19. 2. 2018	3. ročník	24	Video záznam, protokol P2, pracovní listy

(zdroj: Tereza Vybíralová)

Experiment č. 1 a č. 2 byly zaznamenány na videokameru a vše proběhlo se souhlasem rodičů. Videozáznamy nejsou součástí diplomové práce, sloužily pouze jako podklad pro tvorbu protokolů, jež se nacházejí v kapitolách 3.4 a 3.5. Z důvodů ochrany osobních údajů jsem se rozhodla jednotlivé výpovědi žáků zakódovat. Pro snadnou orientaci v protokolu, má každá žák svůj kód Ž-. Písmeno Ž symbolizuje roli žáka, druhé písmeno se u jednotlivých žáků liší a je dáno počátečním písmenem jejich křestního jména. Mé výpovědi jsou vedeny pod kódem E jako experimentátor.

Kromě jednotlivých výpovědi se v tabulce nachází můj komentář, který podrobněji vysvětluje, proč jsem se tak v daných situacích zachovala a nad čím jsem přemýšlela. A především také moje domněnky nad jednotlivými promluvami žáků. Snažím se analyzovat, proč řekli to, co řekli, a co to ukazuje o jejich porozumění.

V přílohách se nachází dvě přípravy. Jedna příprava se vztahuje k předexperimentu, druhá příprava sloužila jako podklad pro první i druhý experiment. Jejich podrobnějšímu popisu se věnuji v kapitolách 3.2 a 3.3.

3.2 Předexperiment

Předexperiment proběhl v rámci průběžné praxe 9. března 2016 na jedné pražské škole. Ve třídě bylo celkem 26 žáků.

3.2.1 Příprava na předexperiment

Když jsem si tenkrát chystala přípravu na hodinu (příloha 1), nahlédla jsem do příručky pro učitele, kde jsem se toho o novém prostředí příliš nedozvěděla. Žádná zmínka o tom, jak do prostředí vstoupit a jak s ním pracovat. Přečetla jsem si pouze správné řešení úlohy a to, že se s Bilandem budu potkávat až do 5. třídy.

Ze získaných informací jsem nebyla vůbec moudrá. Vzhledem k tomu, že jsem na seminářích a přednáškách neustále slyšela, jak nemáme žákům nic prozrazovat, a máme jim pouze poskytovat příležitosti k odhalování, jsem byla najednou zmatená z toho, že vztah mezi mincemi jim mám jen tak říct. A vlastně se mi to vůbec nelíbilo. Své pocity jsem sdílela se svou vyučující a navrhla jsem, že žákům sehraju scénku, budu jim vyprávět o tom, jak jsem si v Bilandu nakoupila suvenýry, kolik stály a jakými způsoby jsem je platila, a že jim tak umožním, aby si jednotlivé vztahy žáci vyvodili sami. A také jsem se rozhodla, že začneme pouze se třemi mincemi – Ag, Bg a Cg. Přišel mi to optimální počet vzhledem k tomu, že se s prostředím potkávají poprvé.

Vytvořila jsem cedulky s nabídkou, zboží pro jednotlivé obchody a pro každého žáka přichystala tašku s plastovými víčky, jež sloužily jako bilandské groše.

3.2.2 Průběh předexperimentu

Před samotným vyvozováním jsme s žáky seděli v kruhu. Chtěla jsem je na téma naladit. Sdělila jsem jim, že dneska si budeme povídat o zemi, která se jmenuje Biland. Vyptávala jsem se jich, jak si takovou zemi představují. Čím by mohla být jiná od naší země. Odpovědi byly různé, prý, že by mohla být čokoládová, kouzelná nebo taky duhová. Poté jsem se ptala, v jakých různých zemí byli žáci sami a co tam bylo jinak, než je tady u nás. Na to odpovídali, že byli v Chorvatsku a že tam mají moře, které my nemáme. A že v Číně lidé vypadají jinak, mají jinou barvu pleti, dodržují jiné zvyky a také mluví jazykem, který je odlišný od toho našeho. Pak si někdo vzpomněl, že když byl v obchodu, tak platil jinými penězi. Bavili jsme se o tom, že na Slovensku a v Německu mají eura, v Americe se platí dolary a my zase máme koruny.

Poté jsem jim začala vyprávět o tom, jak jsem v Bilandu nakupovala. Popsala jsem jim jednotlivé nákupy. Nejprve jsem si koupila jednu věc za čtyři Ag a zaplatila jsem ji čtyřmi mincemi Ag. Všechny čtyři mince jsem vyskládala na koberec vedle koupeného suvenýru. Když jsem šla do obchodu podruhé, nákup už jsem zaplatila dvěma Ag a jedním Bg. Opět jsem jim na koberec k suvenýru vyskládala mince.

Za třetí nákup jsem zaplatila jedním Cg a položila ho vedle suvenýru. Podstatné bylo to, že jsem jim při každém nákupu danou věc ukázala a k ní jsem na koberec vyskládala mince, za které jsem nákup pořídila.

Po této scénce se rozpoutala vášnivá diskuze. Na tom, že jeden Bg je roven dvěma Ag se žáci shodli celkem bez problému. Třída se však rozdělila na dva tábory v momentu, kdy se řešila hodnota Cg. Jedna skupina tvrdila, že je to v pořádku, protože když jeden Bg jsou dva Ag, tak jeden Cg jsou dva Bg. Druhá, méně početná skupina, byla přesvědčena o tom, že jsem paní prodavačku ošidila a že jeden Cg jsou jen tři Ag a ne čtyři. Chvíli horlivě debatovali, ale po chvíli se všichni shodli na tom, že když všechny tři věci stály čtyři Ag, tak z toho vyplývá, že jeden Bg budou dva Ag a jeden Cg se rovná čtyřem Ag.

Posléze jsme rozpustili kroužek a žáci se rozdělili na jednotlivá stanoviště. Každý z žáků dostal svou tašku s groši. V obchodech se na pult vyskládalo zboží, které prodavači nakupujícím nabízeli. Následně si role vyměnili, z prodavačů se stali zákazníci a naopak.

V závěrečné diskuzi jsme se bavili o tom, jak se jim nakupovalo. Reflektovali jsme celý průběh aktivity a po chvíli žáci potvrdili, že se občas stalo, že zákazníci podváděli, protože už neměli peníze. Na základě tohoto problému byl vznešen návrh na to, abychom příště založili banku, kam by si zákazníci mohli peníze chodit půjčovat. Další námitka přicházela ze stran prodavačů, kteří už nemohli prodat drahé zboží, protože na ně nikdo neměl peníze. A protože chtěli uspokojit své zákazníky, rozhodli se zboží zlevňovat. Když jsem se zeptala jak, častou odpovědí bylo: *„no, to je jasný, přece na polovinu."* V úplném závěru najednou vyhrkla jedna žákyně, že zjistila, že když je cena zboží lichá, tak nám vždy zůstane jeden A-groš.

3.2.3 Komentář k předexperimentu

Následovala jsem svou přípravu a s každým nákupem se žáci seznámili s novým vztahem, který si sami svými argumenty obhájili. U určování hodnoty Bg to nebyl problém. Já jsem jim totiž situaci ulehčila tím, že jsem druhý nákup zaplatila jedním Bg a dvěma Ag, z čehož jasně vyplynulo, že jeden Bg je roven dvěma Ag. U hodnoty Cg se sice strhla diskuze, ale protože jsem žáky utvrdila v tom, že jsem opravdu zaplatila dobře, smířili se s faktem, že Cg je roven dvěma Bg, a tím pádem i čtyřem Ag.

Můj plán nic neprozradit tedy vyšel a žáci si opravdu na jednotlivé vztahy přišli sami, takže se mi má příprava osvědčila. Uvědomila jsem si, že jsem dodržela zásadu konstruktivistické výuky a aktivním členem hodiny jsem nebyla já, ale žáci, kteří své nové znalosti získávali na základě svého vlastního poznání, což bylo mým cílem. Žáci mezi sebou horlivě diskutovali a argumentovali a já jsem je jen podporovala.

Každý z žáků měl své vlastní mince, kterými platil, takže jeho poznání bylo podpořeno pomůckami, protože při placení a vracení peněz hrála hlavní roli manipulace.

Když jsem procházela mezi jednotlivými obchody, zdálo se, že jednotlivé vztahy mezi mincemi si žáci osvojili vcelku bez problému. V případě, že se někdo zmýlil, tak se vzájemně opravovali. Prokázalo se, že Biland zároveň podporuje osobnostní a sociální rozvoj žáků, kteří během hry na obchod komunikovali výhradně mezi sebou a pokud nastal nějaký problém, řešili ho zcela samostatně.

Během reflexe se ukázalo, že si žáci dokázali poradit i s nedostatkem peněz, a to tak, že zboží zkrátka zlevnili. Kromě toho řešili nedostatek financí, ale i na tuto situaci našli řešení. Navrhli, aby na příště byla k dispozici banka. Tyto zkušenosti mě utvrdily v tom, že Biland je prostředí, které u žáků rozvíjí také finanční gramotnost.

V neposlední řadě nesmím zapomenout zmínit matematický objevy, který se kterým přišla jedna žačka. Při závěrečné reflexi najednou vyhrkla, že zjistila, že „*když je cena zboží lichá, tak nám vždy zůstane jeden A-groš*“. Tato žákyně během chvilky objevila závislost sudých a lichých čísel v bilandských sumách – a sice, když je suma vyjádřena lichým číslem, vždy tam bude jeden Ag. Domnívám se, že už nikdo jiný ze třídy tomuto jejímu objevu neporozuměl, což ale nevadí, protože to určitě nebylo mým záměrem. Věřím, že pokud žákyně tuto zákonitost ve vyšších ročnících neopomene, rozhodně ji využije. Užitečná jí bude například ve čtvrtém ročníku, kdy se groše přepisují do počítačového jazyka jedniček a nul. Takže poté pozná ze zápisu jedniček a nul, zda je číslo liché či nikoli (liché bude v případě, že se na posledním místě bude nacházet 1).

3.3 Příprava na experiment

3.3.1 Návrat k původní přípravě

Nejprve považuji za nutné zdůraznit to, že první příprava vznikla v rámci přípravy na vyučovací hodinu během průběžné praxe v únoru 2016. Z tohoto důvodu jsem si v přípravě stanovila cíle, kterých jsem chtěla během vyučování dosáhnout, a proto má právě takovou podobu, v jaké se nachází v přílohách. Když jsem se k ní před prvním experimentem, jež se uskutečnil v prosinci 2017, vrátila, byla pro mě téměř nepoužitelná. Všechno bylo velmi obecné, téměř nicneříkající, a proto jsem se ji rozhodla předělat (příloha 2). Samozřejmě jsem si vědoma toho, že vyučovací hodina, z níž vyplynul předexperiment, a dva experimenty, které jsem realizovala plánovaně, jsou naprosto dvě různé situace. I přesto pro mě bylo velmi důležité mít nějakou strukturu sepsanou na papíře, dodávala mi totiž pocit bezpečí a věděla jsem, že se mám o co během experimentu opřít. A právě z tohoto důvodu jsem se rozhodla vypracovat novou přípravu.

Konzultace nad novou přípravou proběhla s oběma vyučujícími a shodly jsme se na tom, že je při zavádění především důležité zdůraznit to, že se jedná o speciální obchod, ve kterém všechno stojí 4 Ag. A také jsme se domluvily na tom, že u druhého nákupu budu platit dvěma Bg (v původní přípravě na předexperiment jsem platila dvěma Ag a jedním Bg).

V rámci opravy přípravy jsem si popsala dvoje cíle – jedny z hlediska učitele a druhé z hlediska žáků. Z původní přípravy jsem zachovala pomůcky, klíčové kompetence, které jsem chtěla rozvíjet, včetně stanovených průřezových témat a mezipředmětových vztahů.

Následně jsem detailně rozpracovala jednotlivé části experimentu. Motivační část jsem víceméně uchovala, doplnila jsem si několik otázek, kterými jsem žáky chtěla do hodiny uvést. Poté jsem si určila tři předměty, které budu žákům představovat a rozhodla se, že první nákup bude stát čtyři Ag, druhý nákup 2 Bg a třetí nákup 1 Cg. Zároveň jsem chtěla zdůraznit, že to byl speciální obchod, ve kterém všechno stálo 4 Ag.

Jako další krok kupředu vidím popsané stanoviště pro aktivitu obchod. Při tvorbě ceníků jsem myslela na to, abych do nabídky zařadila produkty, za něž žáci zaplatí jak sudé, tak liché částky. K tomuto rozhodnutí mě dovedl objev závislosti sudých a lichých čísel, jež byl zmíněn v kapitole 3.2.3.

Velký posun jsem také udělala při plánování závěrečné reflexe. Do nové přípravy jsem si podrobně rozepsala otázky, které jsem měla v plánu žákům pokládat. Otázky byly zaměřeny na více oblastí, některé zjišťovaly, zda byla aktivita pro žáky atraktivní, jiné mapovaly sociální rozvoj žáků a další zkoumaly, zda žáci objevili během obchodování nějakou zákonitost. Takové konkrétní otázky jsem v původní verzi neměla.

3.3.2 Tvorba pracovních listů

Při promýšlení experimentu jsem se rozhodla vytvořit ještě pracovní list s úlohami (příloha 3), který jsem zamýšlela žákům zadat po zavedení prostředí. Jejich vypracování bylo naplánováno na následující den. Pracovní listy mi měly sloužit k diagnostice toho, jak žáci porozuměli zavedení prostředí Biland.

Pracovní list se skládá ze tří úloh.

První úloha je velmi jednoduchá, zkoumá žákovské porozumění rovnosti mincí různé nominální hodnoty. Úkolem je spojit dvě bubliny o stejných hodnotách. Má pouze jedno řešení:

Ag + Ag = Bg

Bg + Bg = Cg

Tuto úlohu jsem do pracovního listu zařadila především proto, aby žákům dodala kuráž. Chtěla jsem, aby zažili úspěch. Zároveň má úloha sloužit jako podpůrný nástroj k řešení dalších úloh.

Druhý úkol je již složitější, úloha je kombinatorického typu a žáci měli za úkol vyřešit, jakými způsoby mohou v Bilandu zaplatit částku 7 Ag. Celkem má tato úloha 6 řešení, nicméně úkolem žákům nebylo najít všechna, ale uvést alespoň nějaká.

Ag + Ag + Ag + Ag + Ag + Ag + Ag

Ag + Ag + Ag + Ag + Ag +Bg

Ag + Ag + Ag + Bg + Bg

Ag + Bg + Bg + Bg

Ag + Bg + Cg

Ag + Ag + Ag + Cg

Třetí, z mého pohledu nejsložitější, úloha zjišťuje, jak si žáci poradí s jednotlivými početními operacemi. Do úlohy jsem záměrně vložila jeden chyták na pozornost – první dvě úlohy byly na sčítání, ale třetí úloha na odčítání.

a) 1 C-groš + 2 B-groše = 8 A-grošů

b) 2 B-groš + 3 A-groše = 7 A-grošů

c) 1 C-groš – 1 B-groš = 2 A-groše

Obě vyučující jsem požádala o to, aby den po mém zavedení žákům pracovní listy rozdaly. Zdůraznila jsem při tom, že je důležité, aby každý pracoval sám za sebe, protože jinak by pro mě výsledky neměly smysl. Samozřejmě jsem všem nabídla, že úlohy mohou řešit s pomůckami, a z tohoto důvodu jsem jim ve třídě nechala plastové groše, kdyby měli žáci pocit, že jim manipulace s groši pomůže při řešení úloh.

3.4 Experiment 1

První experiment proběhl 14. listopadu 2017 na jedné z pražských škol. Ve třídě bylo celkem 21 žáků.

Tabulka 6 – Protokol č. 1

Promluva experimentátora	Promluva žáků	Komentář
E1: „Tak si představte, že jsem byla taky nakupovat, a protože zrovna svítilo sluníčko, potřebovala jsem sluneční brýle, tak jsem šla do obchodu. A ten obchod se jmenuje Vše za 4 Ag. Víte, jak u nás bývalo vše za 39,-, všechny ty ceny jsou stejný, tak tam byl taky takovej obchod a jmenuje se to Vše za 4 Ag. A já jsem tam přišla, potřebuju ty brejle, tak jsem si koupila ty brejličky, tady jsem měla peněženku svojí. A paní prodavačka mi říká, tak slečno, 4 Ag, prosím. Tak jsem jí tam vyndala jeden Ag, druhý Ag, třetí Ag a čtvrtý Ag. Tak jsem byla spokojená, že mám ty brejle a už mi konečně nesvítí do očí. Šla		Zde jsem důležitost obchodu vše za 4 Ag zdůraznila dostatečně. I přesto, že vím, že si žáci obchod *Vše za 39,-* nemohou pamatovat.

jsem tam druhý den, koupila jsem si knížku, ale pořád jsem zapomínala, kde jsem v tý knížce skončila. Takže jsem si potřebovala koupit záložku do knížky. A ta záložka, ta stála taky čtyři Ag. Tak jsem se podívala do peněženky, jenomže už jsem žádný ty Ag neměla.“ Tak jsem ji zaplatila dvěma Bg. Paní prodavačka mi poděkovala. A dala mi záložku. Myslíte, že jsem zaplatila dobře?	Žáci + ŽA: „Ano.“	
E2: „Joo? Proč? ŽA? Proč myslíš?“	ŽA: „Protože to je dvojnásobek.“	Hned na začátku se setkáváme s termínem dvojnásobek. Vím, že ŽA věděl, co dvojnásobek znamená, a akorát to nedokázal dostatečně vyjasnit. Během vysvětlování se do toho zamotal. Použil pojmy sudá a lichá čísla a mám dojem, že si spojil dvě situace dohromady, protože jeho promluva mi signalizuje záměnu násobků a dělitelnosti, a zdá se, že chce vyjádřit, že sudá čísla jsou
E3: „Co to znamená, dvojnásobek?“	ŽA: „Dvojnásobek, to je jako že… jedno číslo… tam je třeba... není lichý počet.“	

		dělitelná dvěma. (a lichá beze zbytku nikoli)
E4: „Rozumíme ŽA?“	ŽS: „Ne.“	ŽS se snažila termín objasnit po svém, aniž by nějakým způsobem reagovala na ŽA, ale ani její vysvětlení se ostatním nezdálo dostatečně jasné. S pochopením se setkala až ŽJ, která nereagovala ani na jednoho ze svých spolužáků. ŽJ pochopila, jaký vztah ŽA a ŽS pojmenovávají. A doplnila to, ŽA A ŽS v popisu chybělo. Neuvedli, mezi jakými objekty ten vztah platí. Kdyby ŽA ihned řekl, že Ag je dvojnásobkem Bg, možná by došlo porozumění dříve.
	ŽS: „No, dvojnásobek znamená… jsou dvě, tak to znamená, že je to dvojnásobek, že jsou vlastně dvě.“	
E5: „Rozumíme ŽŠ? ŽJ?“	ŽJ: „To je tak, že dva A-groše jsou jeden Bg.“	
E6: „Rozumíme teď ŽJ? Co říká?“	Ž: „Ano.“	
E7: „Souhlasíme s ní?“	Žáci: „Ano.“	Chtěla jsem, abychom si tento pojem vysvětlili dostatečně, aby tomu porozuměli i ostatní. Především ti, kteří si z předvedené situace vztahy sami nevyvodili. Z tohoto důvodu jsem se obrátila postupně celkem na tři žáky, abychom si opravdu ujasnili, že všichni víme, co to

		znamená dvojnásobek a mezi jakými mincemi tento vztah platí.
E8: „Dobře. A tak si představte, že já jsem šla do toho obchodu ještě třetí den a koupila jsem si tady toho kohoutka, a ten kohoutek stály taky čtyři Ag.“	ŽL: „Cože? Jenom?“	Když jsme si ujasnili první vztahy mezi mincemi, pokračovala jsem se scénkou.
E9: „No fakt. A pak jsem se podívala do tý peněženky, jenomže už jsem tam neměla ani Ag ani Bg. Zbyl tam poslední Cg.“	ŽV: „Cg!“	V situaci, kdy jsem neměla v peněžence už Ag ani Bg, jeden z žáků správně vytušil, že tak jako pokračuje abeceda budou nejspíš pokračovat i mince, a proto vykřikl, že Cg. Což jsem mu potvrdila.
E10: „I teď jsem zaplatila dobře?“	ŽV: „Ne.“ ŽR: „Cg je čtyři!“	Zde mělo opět přijít důraznější potvrzení z mojí strany tím, že mi paní prodavačka poděkovala a vydala mi poslední nákup. To by žáky utvrdilo v tom, že je to v pořádku.
E11: „Proč ne?“ *(reakce na ŽV)* „Ošidila jsem sama sebe nebo paní prodavačku?“	ŽV: „Paní prodavačku.“ ŽH: „Spíš sebe.“	I z tohoto důvodu mi na otázku, zda jsem opravdu zaplatila dobře, jeden ze žáků odpověděl, že ne. V momentě, kdy jsem se okamžitě zeptala, zda jsem zaplatila dobře, jsem žákům

		sebrala jistotu a oni začali polemizovat nad dalšími možnostmi.
E12: „Co ŽV, co si myslíš ty? Sebe?“	ŽV: „No, ale jako já si myslim, že jste zaplatila dobře, protože to je zase dvojnásobek, že to je jako čtyři. Že to nejsou tři, ale čtyři.“	Když ŽR vykřikl, že Cg je 4, nereagovala jsem na něj, ale obrátila jsem se ŽV, který se domníval, že jsem nezaplatila správně a zeptala jsem se ho proč. ŽV si původně myslel, že jsem ošidila paní prodavačku, ale když jsem se na něj obrátila, vmžiku změnil názor. Očividně chlapec vnitřně se svým přesvědčením velmi bojoval. Nakonec argumentoval již výše diskutovaným násobkem.
E13: „Tak jak jinak bych to mohla ještě zaplatit? Toho kohoutka?“	ŽJ: „Jeden Bg a dva Ag.“	Protože jsem viděla, že některé děti jsou trošku zmatené, položila jsem další otázku. ŽJ správně odvětila, že jedním Bg a dvěma Ag.
E14: „Jo? Slyšeli jste ŽJ? ŽM? Co myslíš, mohla bych zaplatiti toho kohoutka jedním Bg a dvěma Ag? Bylo by to stejný? Jo?“	ŽM: „Jo! Ale vy jste měla v peněžence už jenom Cg. Ale to by šlo, protože Cg je vlastně čtyřnásobek.“	Další žákyně mi to potvrdila, ale zároveň oponovala, že by to nešlo, protože jsem měla už jen Cg (což byla z praktického hlediska samozřejmě pravda). Poté svou výpověď opět změnila. A zopakovala, že Cg je vlastně čtyřnásobek Ag.

	ŽD: „Tří!“ ŽP: „No ale ten Cg že jo je asi..“ „..když máme dva Bg tak je to jako. Má to stejnou hodnotu.“	ŽD nechtěl akceptovat to, že ten vztah mezi mincemi půjde po mocninách dvou, ale očekával, že bude pokročovat v jemu známé posloupnosti (1, 2, 3). Jako je mu blízké například z prostředí jako u Dědy Lesoně (myš=1, kočka=2 a husa=3). Takže proto předpokládal, že když Ag=1, Bg=2 tak to bude pokračovat jako Cg=3.
E15: „Takže jeden Cg je stejná hodnota jako..“	Žáci: „Dva Bg nebo čtyři Ag.“	Ještě jednou žáky vyzvala k tomu, abychom si ujasnili, jakým hodnotám se tedy rovná jeden Cg. Nakonec jsme se všichni shodli na tom, že jeden Cg se rovná dvěma Bg a zároveň 4 Ag.

(zdroj: Tereza Vybíralová)

3.5 Experiment 2

Druhý experiment proběhl 19. února 2018 na stejné škole jako ten předchozí, ale v paralelní třídě. Ve třídě bylo celkem 24 žáků.

Tabulka 7 – Protokol č. 2

Promluva experimentátora	Promluva žáků	Komentář
E1: „No a v tom Bilandu, tam funguje takovej obchod, a všechno, úplně všechno, tam stojí 4 groše (ukazuje prstech 4). Tak jsem přišla do toho obchodu a říkám, paní prodavačko, tady tak pořád svítí sluníčko, mně svítí do očí, potřebovala bych si koupit brýle. Tak jsem si tady koupila brejličky, aby mi nesvítilo do očí. A paní prodavačka mi říká: Čtyři groše."		Oproti předchozí situaci jsem málo zdůraznila, že se jedná o obchod, kde všechno stojí stejně. A mám dojem, že to poté způsobilo v žácích nejistotu při ujasňování vztahů mezi jednotlivými mincemi.
E2: „Tak jsem šáhla do peněženky, takhle jsem jí na pult vyskládala čtyři groše." *(vyskládám čtyři groše na koberec)*	ŽA: „Ag? Cože?" *(pár žáků se nakloní nad vyskládané mince na koberci)*	Zde došlo k situaci, kdy se žáci poprvé setkali s bilandskými mincemi a dozvídají se, Ag je zkratkou pro A-groš.
E3: „To je jako A-groš. Jo?"	ŽJ: „Jo to je jako A je jeden groš, B je dva groše. C je.."	
E4: „No, to uvidíš."		

E5: „No, takže jsem dala paní prodavačce čtyři A-groše, ona mi dala brejličky. No a pak jsem chodila po těch výletech a pořád jsem ty brejle jako musela držet v ruce. Druhej den jsem šla do toho obchodu znova, že bych potřebovala ještě nějaký pouzdro, aby se mi ty brejličky nerozbily, abych je neztratila. A paní prodavačka mi říká: no slečno, zase čtyři Ag. A já jsem koukla do peněženky a tam jsem ty čtyři Ag neměla. A tak jsem ji dala takhle dva Bg.“	ŽJ *(hlásí se)*: „Já to chápu, že B, jedna B se rovná jako dva groše A.“	Během sledování nahrávky jsem si říkala, jestli moje povídání o nákupu a podrobnosti o brýlích není příliš dlouhé, jestli se z příběhu nestává zbytečná atrakce a nestačilo by zkrátka říct, že jsem si koupila tři věci a kolik stály. Chtěla jsem žáky opravdu vtáhnout do děje, ale trochu to zkrátit by nebylo určitě na škodu.
E6: „Takže jsem zaplatila dobře myslíš, jo?“	ŽJ: „Já to chápu, že B, jedna B se rovná jako dva groše A.“	Předchozí domněnka se žákovi po chvíli potvrzuje.
E7: „Souhlasíme?“	Ž: „Uhm uhm, jo jo.“	
E8: „No ŽD?“ *(reakce na hlásícího se žáka)*	ŽD: „Já jsem se chtěl zeptat, jakým jazykem se tam mluví?“	Během mého povídání se celou dobu hlásil jeden chlapec. Když jsme si potvrdili, že jeden Bg se rovná dvěma Ag, tak jsem ho vyvolala. Myslela jsem, že chce diskutovat nad
E9: Bilandsky.	ŽK: „A ty mluvíš bilandsky?“	

E10: „No, trošku.“	ŽK: „No tak něco řekni!“	hodnotou mincí. Nicméně jeho zajímalo, jak se v Bilandu mluví. V ten moment jsem si to neuvědomila, ale nyní si zpětně opět pokládám otázku, zda povídání o jiných zemích nebylo větším lákadlem než bilandské mince a jestli ŽD vnímal naši debatu nad jednotlivými vztahy, nebo ho pouze zajímalo, jakou řečí se v Bilandu mluví.
E11: „Oj oj. To je jako dobrý den.“		
E12: „No a pak jsem tam šla třetí den a chtěla jsem si koupit něco na památku, a protože mám ráda jednorožce, tak jsem si koupila takovouhle hezkou brož s jednorožcem. No a teď jsem koukla do tý peněženky, a nebyly tam ani Ag, ani Bg, zbyl mi tam jeden Cg, takže jsem to zaplatila.“		Zde jsem udělala velkou chybu, která zbytečně zkomplikovala následnou diskuzi. Nedala jsem dostatečný důraz na fakt, že všechno stojí 4 Ag. A že když jsem zaplatila za brož Cg, paní prodavačka byla spokojená, poděkovala mi a bylo to v pořádku. Tím, že jsem se hned obrátila na děti, jsem v nich podnítila nejistotu. Nejistota byla bezesporu zapříčiněna mým pochybením, protože jsem po nich chtěla, aby si

		to sami obhájili, ale měla jsem to dostatečně představit jako fakt.
	ŽV: „Čtyři! Tři, to je málo! Když A je jedna, B je dva tak C je tři. To je blbě, bereme to zpátky. To by musel bejt Dg! Musela bys mít Dg.“	V momentu, kdy jsem prohlásila, že třetí věc jsem zaplatila jedním Cg se začal vzpouzet jeden žák, který očekával, že hodnota Cg se rovná třem Ag a ne čtyřem. Logicky následoval číselnou řadu, která je mu blízká z desítkové soustavy, a proto čekal, že bude platit posloupnost 1, 2, 3 jako je tomu třeba v prostředí Dědy Lesoně. Proto také prohlásil, že bych musela zaplatit Dg.
	ŽH: „Podle mě to je tak, že Cg se rovná jakoby čtyřem Ag.“	Poté do debaty vstoupila ŽH, která prohlásila, že Cg je roven čtyřem Ag. Nesetkala se s pochopením, naopak rozpoutala diskuzi.
	ŽV: „Ale proč?“	
	ŽP: „Podle mě taky, protože když dáš dva Ag, vznikne ti	Do týmu ŽH se přidal ŽP, který její prohlášení doplnil. Jeho argumentem

	jeden Bg, takže když dva Bg, vznikne ti jeden Cg.“	bylo tvrzení, že sečtením dvou předchozích grošů získáme hodnotu toho následujícího.
	ŽV (*kroutí hlavou)*	Ani tento argument však ŽV nepřesvědčil.
E12: „A kdybych si chtěla koupit (*chvilku váhá*) třeba telefon…a stál by taky čtyři Ag.“	ŽA: „To je málo!“	Protože ŽV nechtěl tento argument přijmout, rozhodla jsem se pro další ukázku. Tentokrát jsem žáky vyzvala k tomu, aby mi řekli, jak bych mohla zaplatit gumičku do vlasů, která by stála pořád čtyři Ag, a chtěla bych je zaplatit jak Ag, tak Bg.
E13: „No dobře, tak… gumičku na vlasy. Stála by čtyři Ag. A chtěla bych zaplatit jak Ag, tak Bg. Šlo by to nějak?“	ŽM: „Jo, to by byly dva Ag a jeden Bg.“	Vyskládala jsem proto mince na koberec. Chtěla jsem naší diskuzi podpořit materiálně, aby si to žáci dokázali lépe představit, a abych s mincemi mohla manipulovat.
E14: „A takže tim Cg jsem zaplatila dobře, jo? Neošidila jsem sebe ani paní prodavačku?“	ŽF: „Jojo.“ ŽM: „Ne!“ ŽD: „Jo, paní prodavačku!“	A znovu žáky vyzvala k tomu, aby mi potvrdili, že jsem paní prodavačku neošidila. Ani tentokrát se to nepovedlo úplně

		stoprocentně a odpovědi se stále různily.
E15: „Myslíš? A proč?“ *(obrací se na ŽD)*	ŽD: „Protože si myslim, že když Ag jsou jedna, béčko sou dva a céčko jsou tři.“	Někteří žáci přijali, že Cg je roven čtyřem Ag, ale například ŽD si pořád myslel, že jsem ošidila paní prodavačku. Na otázku proč, mi odpověděl, že přece A je jedna, B je dva, tak C je tři. Nechtěl připustit, že by to mohlo být jinak. Proč by taky bylo, když se od malička učí číselnou řadu tak, že po dvojce následuje trojka.
	ŽP: „To sice jo, ale ty můžeš mít násobkama. Když Bg se rovná dvěma Ag.“	ŽP, který problematice porozuměl, se mu snažil vysvětlit, že to tak nemusí být vždy, že vztahy nejsou dány jako u Dědy Lesoně posloupností – číselnou řadou 1, 2, 3 a že v Bilandu je to násobkem (přesněji dvojnásobkem).
	ŽD: „Ale u nás se peníze počítaj plus a ne násobky.“	ŽD ale přesto nechtěl přijmout fakt, že by to mohlo být jinak. Argumentoval tím, že u nás se přece peníze taky sčítají a nenásobí se: je vidět, že

		nepřijal vztah mezi mincemi Ag, Bg, Cg. Domnívám se, že největší problém je v tom, že na naších mincích je hodnota dána číslicí – 2 Kč, 5 Kč, 20 Kč, a daná číslice přímo vyjadřuje nominální hodnotu dané mince. Zatímco na bilandských groších není napsáno, že jeden Cg je roven 4Ag. Kdyby tam, byla čtyřka, ŽD by pak lehce mince spočítal, protože by zmizely „násobky“ (=převod mezi mincemi, jež jsou dány násobkem dvou), které jsou pro něj náročné a bylo by to pro něj pouze sčítání. Je to na něj zkrátka příliš abstraktní.
	ŽP: „Jenomže tady nejsi v naší zemi.“	ŽP se mu snažil vysvětlit, že neznamená, pravidla, která platí v naší zemi, platí všude.

	ŽC: „Jak Pepa říkal, dva Ag se rovnaj jeden Bg a dva Bg se rovnaj jeden Cg.“	Další žák navázal na tvrzení ŽP. A opakoval teorii násobků, kterou ŽP argumentoval
	ŽF: „No a dva Cg se rovnaj jeden Dg.“	Po chvilce jiný žák dodal, že tím pádem se dva C groše rovnají jednomu D-groši. Ten taktéž problematice porozuměl a předvídal, jak by vztahy mezi mincemi gradovaly.
E16: „No, Dg tady nemáme sice, ale bylo by to tak? Bylo nebo nebylo?“		
E17: „Souhlasíme?“	ŽP: „No, v tom případě by Dg bylo osm grošů.“	Vyzvala jsem ostatní žáky, aby se k tomu vyjádřili. V tom se ozval další žák, který Dg převedl na Ag a prohlásil, že tím pádem by to bylo 8 Ag. Porozuměl posloupnosti 1, 2, 4, 8.
	ŽL: „Aha, a Eg by byl 12.“	Zde ho ŽP opravil ŽL, že by to bylo 16. Předpokládám, že ŽL udělal numerickou chybu, (pravděpodobně 4+8 = 12) protože vzápětí dodal, že Fg by byl 24. zde byl už jeho postup správný (12 x 2 = 24) pravidlo násobků už zase následoval, takže se
	ŽP: „16!“	
	ŽL: „A ještě Fg by byl 24.“	

		domnívám, že předtím se jen pomýlil.
	ŽP: „Ne, Fg je 32. A Gg by byl 64. Pak 128“	ŽP ho znovu opravil, že Fg je 32 a poté dodal, že Gg by byl 64 a nakonec prohlásil, že by to pokračovalo 128. Viděla jsem, že má do problému vhled a rozumí tomu systému.
E18 *(reaguje na ŽP)*: „Dobrý, jak jsi na to přišel?“	ŽP: „No, prostě že jsem počítal dvakrát to minulý.“	Požádala jsem ho, aby se to pokusil vysvětlit ostatním.
E19: „Rozumíme tomu, co řekl ŽP?“	Ž: „Ano.“ Ž: „Ne.“	Ne všichni tomu, co řekl ŽP, rozuměli, ale nebylo to pro mě stěžejní, takový vhled do problematiky jsem od první hodiny neočekávala a je mi jasné, že tento fakt rozhodně nepřijali v ten moment všichni žáci. Bylo pro mě důležité to, aby byly žákům jasné vztahy mezi třemi základními mincemi Ag, Bg a Cg.
	ŽB: „No prostě koukej, nejdřív počítáš jednou čtyři, dvakrát čtyři, třikrát čtyři, takhle po sobě.“	Z této výpovědi žáka se domnívám, že se velmi upoutal k číslu 4 – protože ve vztahu Cg a Ag je čtyřka klíčová. A diskuze ohledně

		tohoto vztahu nám zabrala dost času. Z tohoto důvodu si myslím, že byl mylně přesvědčen o tom, že se jedná o násobky čtyř.
E20: „Koukejte, tady máme takhle Ag. Pak tady ten Bg a kam dam ten Cg?“	ŽA: „Sem, no takhle tady.“ ŽJ: „Nad to, jo to je jako pyramida.“	Protože jsem chtěla, aby si žáci osvojili vztahy v praxi, rozhodla jsem se debatu ukončit a zvolila závěrečné shrnutí vztahů.
E21: „Dobrý, shodnem se na tomhle všichni?“	Ž: „Jo.“	

(zdroj: Tereza Vybíralová)

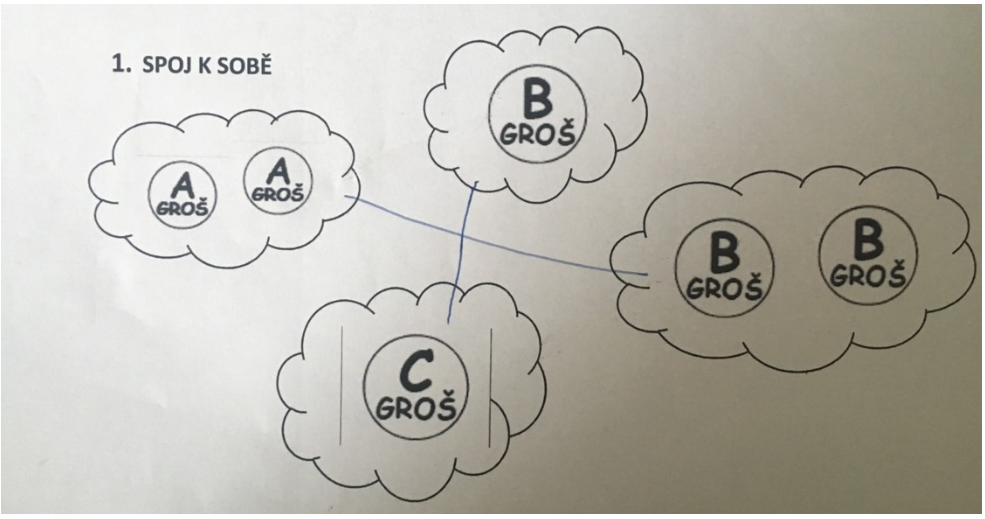
3.6 Analýza pracovních listů

Při analýze pracovních listů jsem se rozhodla, že ji provedu pro obě třídy společně. Jelikož se chyby opakovaly, rozhodla jsem se u každé úlohy uvést ilustrace chybných řešení.[17] Zároveň jsem se snažila odhadnout, proč žáci při řešení chybovali zrovna takto.

Kromě chybných řešení také zmíním několik zajímavých řešení, která se v pracovních listech objevila.

3.6.1 Úloha 1

Při řešení této úlohy nenastaly velké potíže, ze všech 45 žáků ji špatně vyřešili pouze dva žáci (obrázek 21). Jelikož oba žáci v následujících úlohách ukázali, že vztahům mezi mincemi rozumí, předpokládám, že chyba vznikla pouze z nepozornosti.



Obrázek 21 (zdroj: Tereza Vybíralová)

[17] Kromě chybných řešení jsem také řešila nepříjemnou situaci, která při vyplňování pracovních listů nastala. V jedné třídě, si někteří žáci s řešením úloh nevěděli rady. Paní učitelka žákům navrhla, aby úlohu neřešili, pokud neví jak, a aby napsali k zadání vzkaz, že to nepochopili. Celkem takto zareagovali 4 žáci. Tento postup paní učitelky nepovažuji za vhodný, protože je-li třída vedena konstruktivisticky, měla žáky vybídnout k tomu, aby se o řešení alespoň pokusili a nevzdali to. Takže ve čtyřech případech bylo pouze písemné oznámení toho, že si žák neví rady a že úloze neporozuměl.

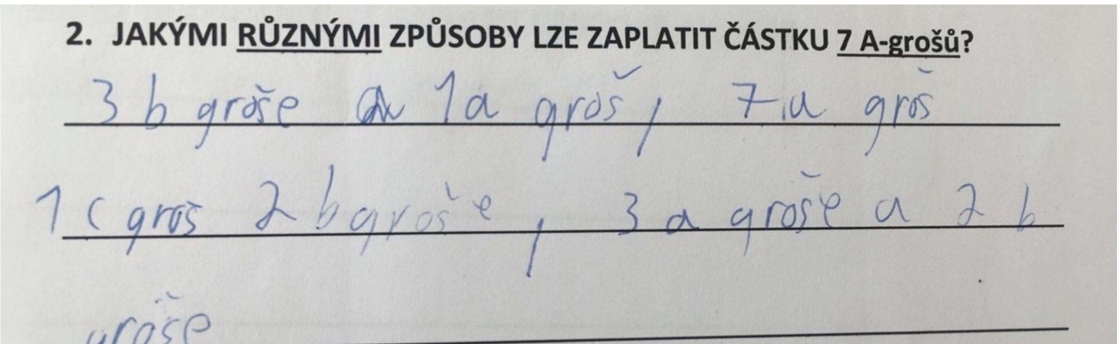
Dva žáci ji však nevyřešili vůbec. U jednoho z nich se domnívám, že k nevyřešení úlohy přispěla nepozornost. Myslím, že ji přeskočil a pak už se k ní nevrátil. U toho druhého žáka přemýšlím nad tím, co způsobilo, že pracovní list téměř nevypracoval. Kladu si otázku, zda opravdu problematice neporozuměl, nebo zda zde hrálo roli něco jiného.

3.6.2 Úloha 2

Ve druhé úloze chybovalo celkem 12 žáků. Žádný žák neuvedl všechna řešení, průměrně se v pracovních listech objevovala tři řešení.

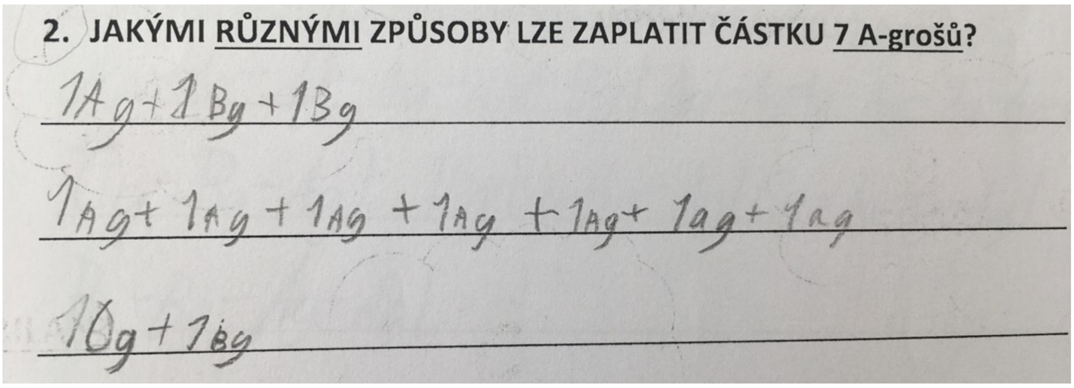
Nyní uvedu některá z chybných řešení, na které jsem během procházení pracovních listů narazila.

Na obrázku 22 vidíme, že žák chyboval pouze ve třetím řešení. Zároveň je to jediné řešení, v němž hraje roli Cg. Částka 1 Cg a 2 Bg neodpovídá částce 7 Ag ale 8 Ag. V tomto případě si myslím, že se žák domnívá se, že hodnota mince Cg je rovna 3 Ag. Tato situace je velmi pravděpodobná, jelikož hodnota Cg vyvolala diskuzi a fakt, že Cg je roven 4 Ag nebyla všemi žáky akceptována.



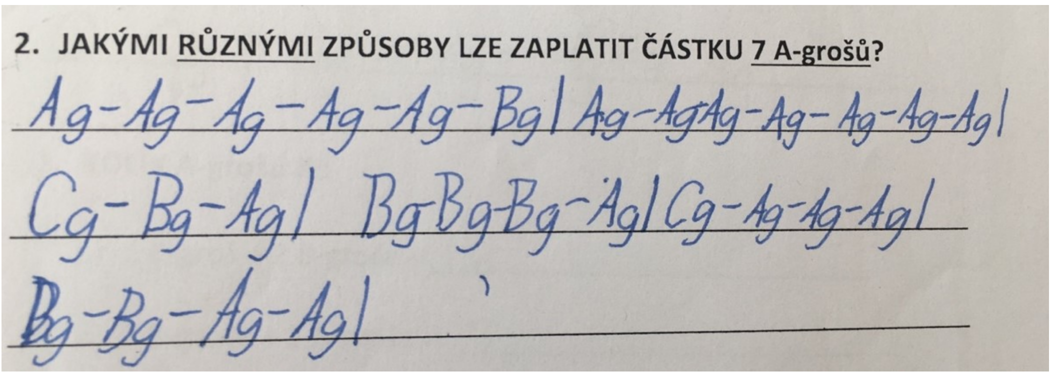
Obrázek 22 (zdroj: Tereza Vybíralová)

Na obrázku 23 můžeme pozorovat tři řešení, které žák uvádí. Jediným správným je na druhém řádku, kdy žák vyjádřil částku 7 Ag jako součet jednotlivých Ag. U prvního řešení je výsledek 5 Ag (1 Ag + 1 Bg + 1 Cg), v tom třetím nám uvedené mince dohromady dají 6 Ag. (1 Cg + 1 Bg). Žák zřejmě vztahům mezi mincemi zatím neporozuměl.



Obrázek 23 (zdroj: Tereza Vybíralová)

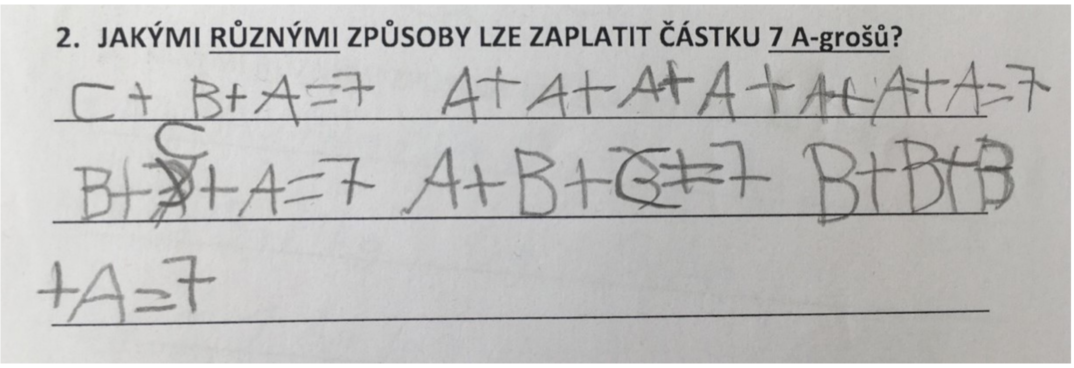
Obrázek 24 je příkladem chyby z nepozornosti. Z množství správně uvedených řešení se domnívám, že má vhled do problematiky, uvedl několik řešení, včetně s Cg. Jediné chybné řešení je na posledním řádku Bg – Bg – Ag – Ag, kde chybí ještě jeden Ag. Tato chyba mohla být způsobena také únavou.



Obrázek 24 (zdroj: Tereza Vybíralová)

Řešení na obrázku 25 není chybné a nabízí otázku k diskuzi.

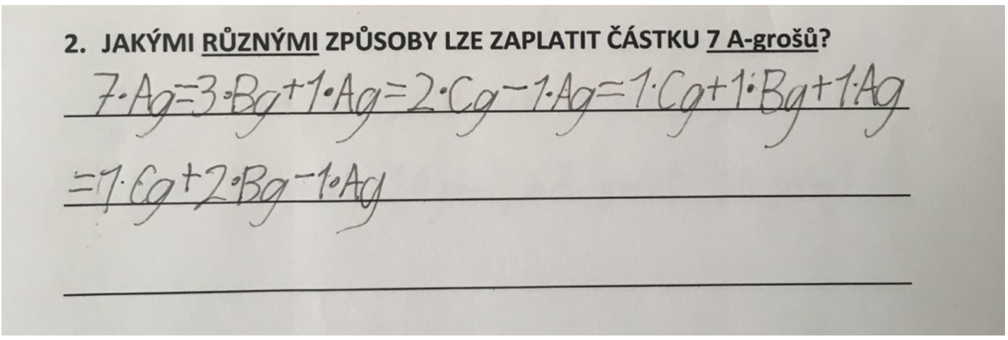
Žák uvedl tři řešení: C + B + A, B + C + A a A + B + C. Všechna tato řešení jsou samozřejmě správná, ale zároveň jsou stejná. Je to výborný podnět pro diskuzi ve třídě, zda jsou tato řešení opravdu stejná, zda záleží na pořadí mincí, či nikoli.



Obrázek 25 (zdroj: Tereza Vybíralová)

Poslední ukázkou (obrázek 26) bych chtěla poukázat na řešení, které prokázalo žákův jiný vhled do situace. Žák se patrně při řešení vrátil k situaci v obchodu a do pracovního listu uvádí dvě řešení, která poukazují na to, že mu paní prodavačka vrací.

2 Cg – 1 Ag a 1 Cg + 2 Bg – 1Ag (mínus zjevně symbolizuje vrácení od paní prodavačky).



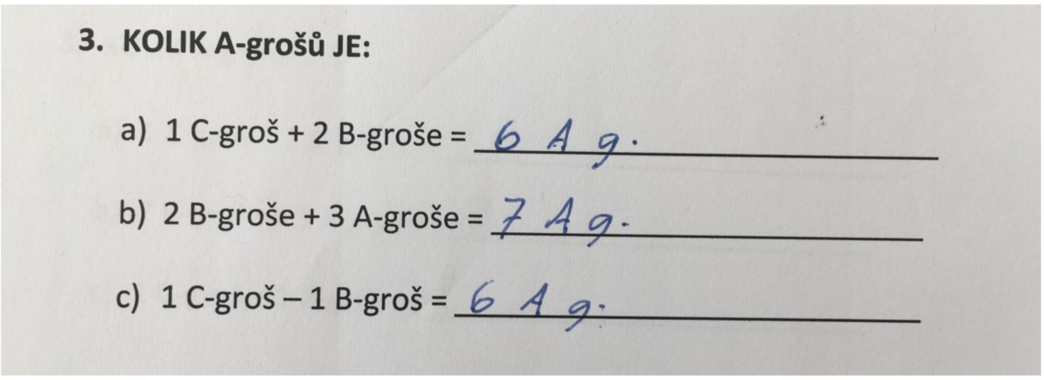
Obrázek 26 (zdroj: Tereza Vybíralová)

3.6.3 Úloha 3

a) 1 C-groš + 2 B-groše

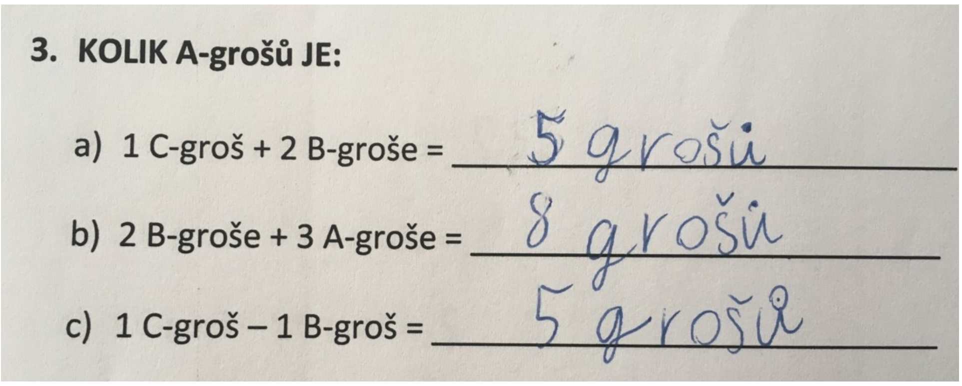
U této úlohy se objevilo celkem 4 různé chybné odpovědi.

Celkem pět žáků uvedlo výsledek **6 Ag (**obrázek 27). Předpokládám, že si správně uvědomili, že 1 Cg je roven 4 Ag a pak už přičetli hodnotu Bg (= 2 Ag) a nevšimli si, že jsou tam dva.



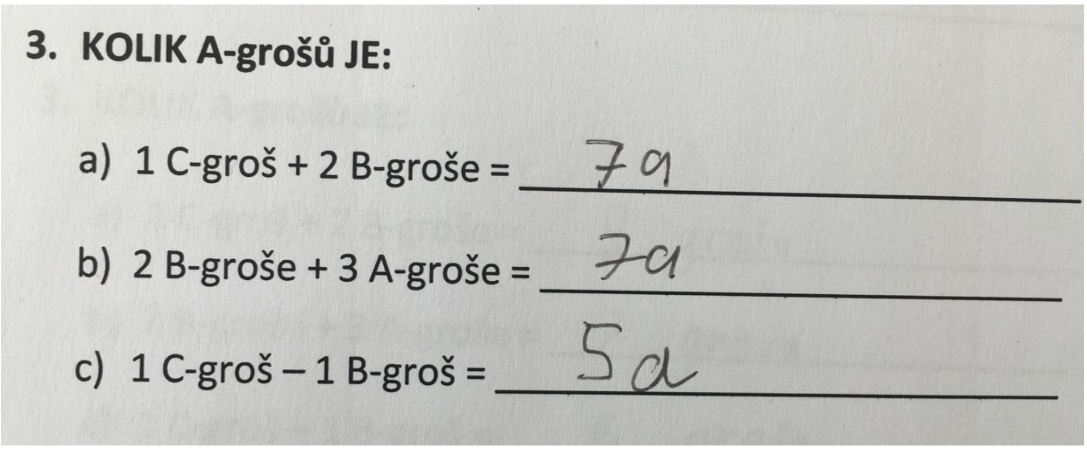
Obrázek 27 (zdroj: Tereza Vybíralová)

Dalším nejčastějším chybnými výsledkem bylo 5 Ag (obrázek 28). Toto řešení uvedli celkem čtyři žáci. Hádám, že si správně převedli, že 2 Bg jsou 4 Ag a pak už přičetli 1, a neuvědomili si, že to je Cg a ne Ag.



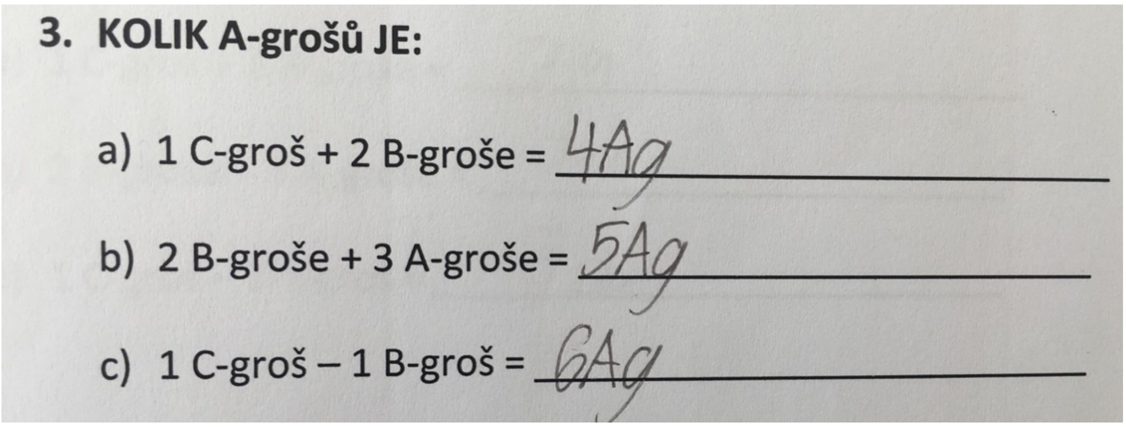
Obrázek 28 (zdroj: Tereza Vybíralová)

Jeden žák jako svou odpověď uvedl 7 Ag (obrázek 29). Zde se domnívám, že žák počítal s hodnotou Cg jako 3 Ag (ne 4 Ag) a pak k tomu přičetl hodnotu 2 Bg, což jsou 4 Ag, takže mu to dohromady dalo 7 Ag.



Obrázek 29 (zdroj: Tereza Vybíralová)

Další žák zaznamenal řešení 4 Ag (obrázek 30). Tady tuším, že žák posunul hodnoty a řešil úlohu 1 Bg a 2 Ag. V tom případě by to odpovídalo výsledku 4 Ag.

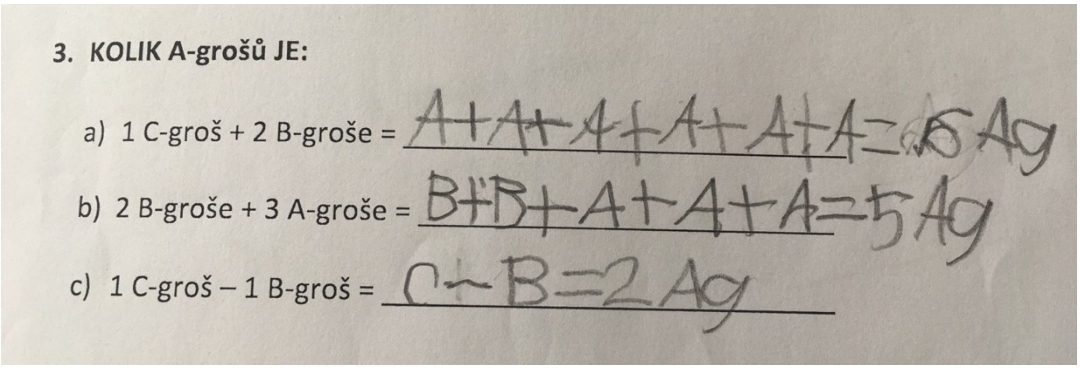


Obrázek 30 (zdroj: Tereza Vybíralová)

b) 2 B-groše + 3 A-groše

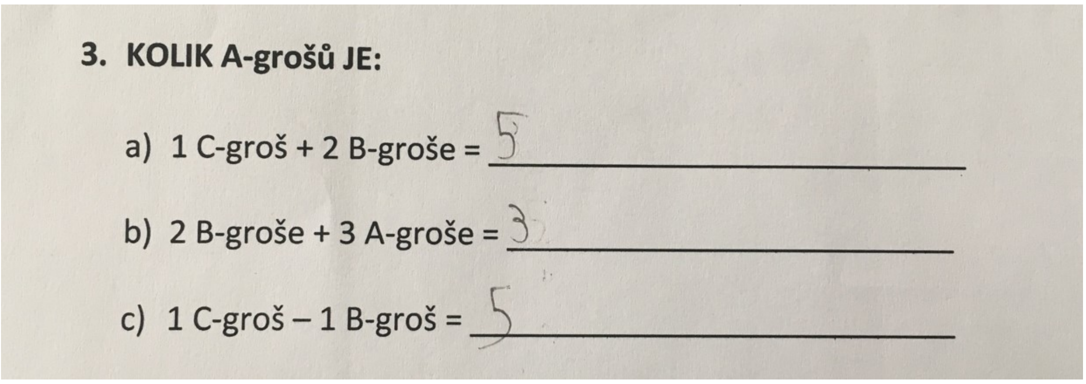
Celkem se objevila 3 různá chybná řešení.

Prvním z nich bylo 5 Ag. Toto řešení uvedli dva žáci. Předpokládám, že sečetli pouze počet mincí, nehledě na jejich nominální hodnotu. Toto řešení můžeme najít například u řešitele na obrázku 31.



Obrázek 31 (zdroj: Tereza Vybíralová)

Jeden žák jako svou odpověď uvedl 3 (obrázek 32). Vzhledem k tomu, jak ale žák vypracoval celý pracovní list, je zřejmé, že problematice nerozumí a čísla, která ho zrovna, v domněnce, že se možná trefí do správného výsledku.



Obrázek 32 (zdroj: Tereza Vybíralová)

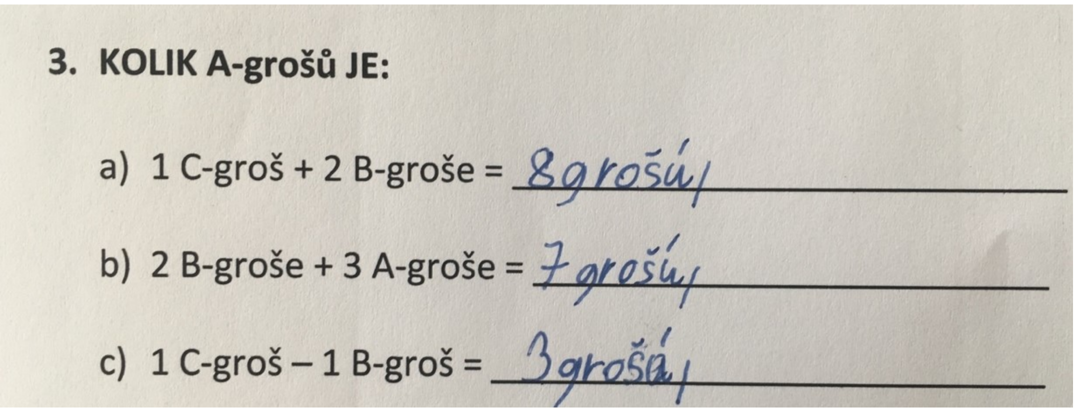
Další žák uvedl jako řešení 8 Ag (obrázek 28). Zde mě napadá, že se žákovi prohodili hodnoty Ag a Bg. V tomto případě by to bylo jako 2 Ag + 3 Bg (což je 6 Ag), a to nám dohromady dá 8 Ag.

c) 1 C-groš + 2 B-groše.

Téměř polovina (celkem 22 žáků) jako řešení uvedla 6 Ag. Tato chyba byla způsobena použitím sčítání místo odčítání. Toto řešení můžeme vidět na obrázcích 27 a 30.

Čtyři žáci uvedli jako výsledek 5 Ag, což můžeme vidět například na obrázcích 28, 29 a 32. Předpokládám, že si správně převedli Cg na 4 Ag a pak místo odčítání použili sčítání a přičetli na místo jednoho Bg jeden Ag.

Jeden žák uvedl jako svou odpověď 3 Ag. (obrázek 33). Domnívám se, že si žák správně převedl 1 Cg na 4 Ag a pak odečetl jeden Ag místo Bg.



Obrázek 33 (zdroj: Tereza Vybíralová)

3.6.4 Shrnutí pracovních listů

Z analýzy pracovních listů jsem vyčlenila několik kategorií chybných řešení, které se opakovaly. Snažila jsem se proniknout do žákovského myšlení a odhadnout, proč tato řešení uvedli. V zásadě se objevovaly dva hlavní důvody, proč žáci chybují.

První, velmi častou kategorií, bylo chybování z nepozornosti. Nepozornost při řešení může být způsobena nervozitou, či tlakem, jež je na žáka vyvíjen. K nepozornosti může přispívat také únava, způsobená náročností či vysokým počtem úloh, případně kombinací obou zmíněných.

Dalším příčinou chybování je neporozumění, v tomto případě základním vztahům mezi mincemi. Jako je například chybné přesvědčení o tom, že hodnota Cg je rovna třem A-grošům. V tomto případě se domnívám, že by chybování snížilo použití pomůcek – groše k manipulaci a také nástěnný plakát, jež objasňuje vztahy mezi mincemi.

Poslední příčinou chybného řešení bylo použití špatné početní operace, která byla však pouhým následkem nepozornosti.

3.7 Shrnutí experimentů

Experimenty v obou třídách byly velmi přínosné a každý mi poskytl jinou zkušenost. I když jsem si oba naplánovala stejně, jejich výstupy se lišily. Každá třída diskutovala jinak dlouho, jiným způsobem a nad něčím jiným. Hned na začátku prvního experimentu žáci narazili na pojem násobky, a dlouho trvalo ho vysvětlit, jelikož nepojmenovali objekty, mezi nimiž tento vztah platí. Stěžejním bodem celé diskuze bylo obhajování vztahů mezi Cg a Ag. Zda se Cg rovná třem či čtyřem Ag. Fakt, že Cg je roven 4 Ag byl však přijat celkem v poklidu. Což se ale nedá říct o zkušenosti, kterou jsem získala při druhém experimentu.

I v rámci druhého experimentu došlo k diskuzi, zda je Cg roven třem nebo čtyřem Ag. Debata zde byla plodnější a obě strany za svůj názor bojovaly horlivěji než v prvním případě. A troufám si říct, že někteří jedinci se přes svoje přesvědčení, že 1 Cg = 3Ag, nepřenesli. A právě v tom pro mě byl druhý experiment obrovským přínosem. Díky debatě dvou žáků jsem pochopila, v čem je pro některé žáky toto prostředí tak náročné. Tak jak popisuji v protokolu č. 2, operace s mincemi je pro některé žáky příliš abstraktní.

Hlavní rozdíl mezi našimi mincemi a bilandskými groši spočívá v označení a v hodnotě. Pro některé žáky je náročné pracovat s groši proto, že jejich nominální hodnota není definována číslem, ale vztahy mezi danými groši. Zatímco koruny jsou označeny čísly, které zároveň vyjadřují jejich nominální hodnotu. Na mincích je v Bilandu napsáno Ag, Bg, Cg (nejsou zde čísla, neuvádí hodnotu mince v Ag), ale u nás je na mincích napsáno 1 Kč, 2 Kč, 5 Kč (což je zároveň hodnota mince v Kč.)

Kromě toho diskuze také přinesla další objev a tím byla posloupnost – mocniny čísla dvě, kterou jeden ze žáků objevil.

Před experimenty jsem se sama sobě znovu zapřísáhla, že zavedení Bilandu bude konstruktivně vedeno a žákům hodnoty mincí neprozradím. Po celou dobu jsem se snažila respektovat zásady konstruktivistického pojetí výuky. A troufám si tvrdit, že jsem byla úspěšná. Že se tak v několika případech opravdu stalo, můžu prokázat v souvislosti s tabulkou 1, v níž jsou zásady definovány.

Jednou ze zásad bylo zajištění kvality hodnoty poznání, což jsem podpořila tím, že jsem nikam nechvátala, a všechen čas jsem věnovala pouze seznámení s novým prostředím.

Na to plynule navazuje další zásada, kterou je trvanlivost poznání. Zárukou dlouhodobého poznání je fakt, že žáci budou s novým prostředím pracovat i nadále ve vyšších ročnících a není to téma, kterému by se žáci věnovali pouze několik hodin.

Další známkou konstruktivistického pojetí byl vztah mezi mnou a žáky, jež byl čistě na partnerské úrovni. Žáci diskutovali především mezi sebou a mě jakožto učitele během aktivity téměř vůbec nepotřebovali.

V neposlední řadě jsem také kladla důraz na to, aby byli žáci vyzváni k aktivní činnosti, což jsem zajistila hrou na obchod, a to podpořilo, že poznatek žáků nebyl reproduktivní, ale osvojili si ho sami na základě své zkušenosti.

V následujících odstavcích bych naopak chtěla upozornit na několik věcí, na které bych si příště dala větší pozor anebo je udělala úplně jinak.

Z obou zkušeností vyplývá, že je prospěšnější motivační příběh zkrátit. Motivace byla často na hraně s atrakcí, což není v tomto případě žádoucí. Příběh má samozřejmě sloužit k tomu, aby žáky na nové prostředí nalákal, zároveň však příběh nesmí přebít matematický obsah. Pak by možná nedošlo k situaci, kdy žák místo nad vztahy mezi mincemi, přemýšlel nad tím, jakou řečí se v Bilandu mluví.

Dalším bodem, který je potřeba vypíchnout, je nezbytná důslednost. Díky ní se dá předejít nekonečným debatám. V momentě, kdy jsem žákům vyprávěla o jednotlivých nákupech, bylo nutné dodat, že paní prodavačka byla vždy spokojená s tím, jak jsem zaplatila. Aby jim vztahy byly představeny jako neměnná konvence. Jinak žáci nabydou dojmu, že je očekáváno, aby oni rozhodli, zda jsem zaplatila správně či nikoli.

Taktéž je potřeba poskytnout žákům dostatek prostoru pro diskuzi. Nechat žáky argumentovat, dát tomu volný průběh, ale zároveň udržet debatu v tématu.

Nezbytnou částí je samotné obchodování. Určitě bych nezkracovala dobu, kdy žáci obchodují a manipulují s penězi. Je nezbytné, aby žáci získali zkušenosti, manipulovali s mincemi a aby si prožili zaměňování mincí. K této aktivitě bych příště do třídy vyvěsila plakáty, které by žákům sloužily jako tahák, v případě, že by si nebyli jisti, jaké vztahy mezi mincemi platí. Rozhodně bych zařadila oba typy plakátů – jak tabulku 2 tak i stromový diagram na obrázku 2.

Velmi důležitým ponaučením je to, že bych příště zadání pracovních listů provedla jedině já sama. Fakt, že jsem se obrátila na paní učitelky, dle mého názoru ovlivnil výsledky. K vyplnění pracovních listů bych žákům nabídla jakékoli pomůcky (plastové groše, plakáty) a také dostatek času. Při nesnázích bych žáky povzbudila k tomu, aby to alespoň zkusili.

A posledním bodem, který bych příště udělala jinak je to, že bych se chtěla více věnovat reflektování pracovního listu. Po vypracování bych určitě ještě věnovala čas tomu, abychom si jednotlivé úlohy prošli společně, o řešení úloh vyprávěli a sdíleli si svoje postupy řešení. Jelikož jsem přesvědčena o tom, že ne všichni žáci postupovali stejně, mohli by si vzájemně poradit. A jak jsem již zmínila v analýze řešení, nabízí se zde prostor k diskuzi o tom, za při řešení úlohy č. 2 záleží či nezáleží na pořadí mincí.

3.8 Dotazníkové šetření mezi učiteli

3.8.1 Východiska a cíle

Již v úvodu jsem zmínila, že zlomovým okamžikem pro mojí práci s tímto prostředím byla letní škola o Hejného metodě. Strávila jsem čtyři dny s kvalifikovanými lektory, ale především jsem měla možnost být součástí komunity učitelů. O přestávkách mezi jednotlivými dílnami jsem si s ostatními účastníky školy povídala. Začala jsem jim popisovat své zážitky ze studií a také zmínila svůj výstup o Bilandu na jedné z učitelských konferencí. Bylo pro mě velkým překvapením, že o Bilandu někteří slyšeli poprvé. Nebylo jich moc, ale pár jedinců se našlo. Začali mi klást spoustu otázek. Jak jsem se k Bilandu dostala, v čem prostředí spočívá, co rozvíjí, zkrátka bylo vidět, že nemají moc informací a rádi by jich měli víc. Což bylo dalším důvodem, proč jsem se rozhodla věnovat této problematice ve své diplomové práci.

Vytvořila jsem dotazník (příloha 4), který měl zmapovat povědomí učitelů o tomto prostředí, a především jejich vztah k němu. Chtěla jsem zjistit, jaké s ním mají zkušenosti a zda vůbec toto prostředí do své výuky zavádějí, jelikož se ke mně několikrát donesla odpověď, že na to není čas a že je moc složité, a proto ho vyřazují. Také jsem chtěla jsem zjistit, zda si vůbec uvědomují potenciál tohoto prostředí, nebo jsou přesvědčeni o tom, že dvojková soustava na první stupeň nepatří, a přes to zkrátka nejede vlak.

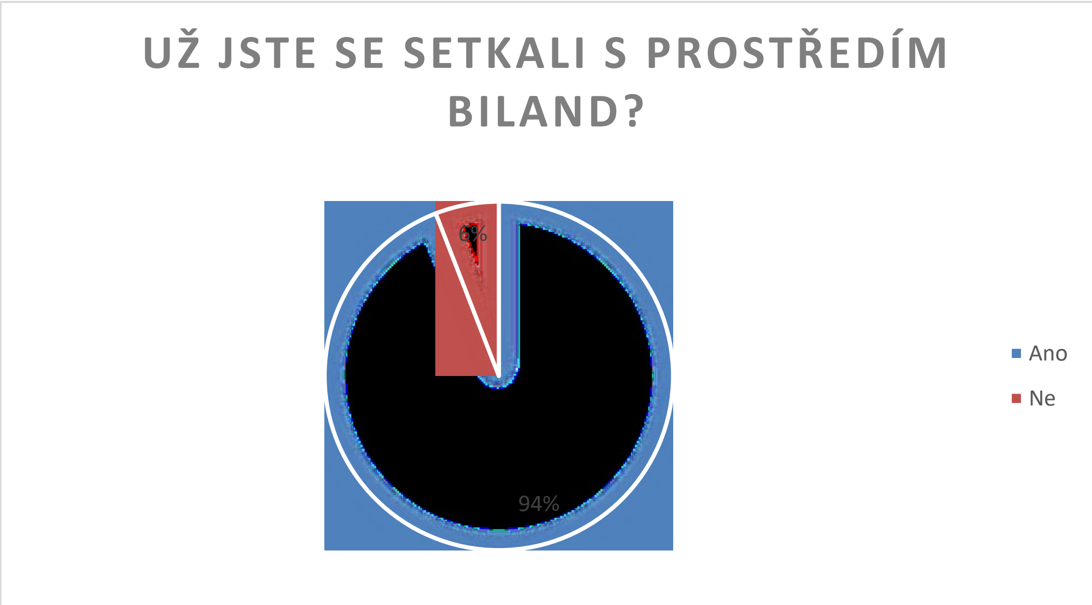
3.8.2 Prostředí a organizace

Pro zařazení dotazníkového šetření do své diplomové práce jsem se rozhodla na poslední chvíli, a také proto jsem zvolila čistě elektronickou cestu k získávání respondentů. Krátká doba sběru dat ani způsob zadání nepodpořilo návratnost dotazníků, a proto je jejich návratnost nízká. Hlavní platformou pro sběr dat pro mě byly sociální sítě. Chtěla jsem získat variabilní vzorek, proto jsem dotazník sdílela do různých učitelských skupin, kde se nacházejí učitelé z celé České republiky. Dotazníky jsem také rozeslala mezi své spolužačky a kolegyně, a nakonec jsem získala téměř 70 odpovědí, které jsem zpracovala.

3.8.3 Vyhodnocení získaných dat

Na první otázku *Už jste se setkali s prostředím Biland,* jež mapovala povědomí o prostředí Biland mezi učiteli, odpovědělo kladně téměř 94 % respondentů, což znamená, že pouze 4 z 68 tázaných se s prostředím Biland nikdy nesetkali. Tento výsledek mě upřímně překvapil. Očekávala jsem, že záporných odpovědí bude víc.

Graf 1 - Už jste se setkali s prostředím Biland



(zdroj: Tereza Vybíralová)

Druhá otázka zněla *Jak dlouho učíte dle Hejného metody výuky matematiky*[18]. Zjišťovala, zda respondent učí dle HM, a pokud ano, tak jakou dobu.

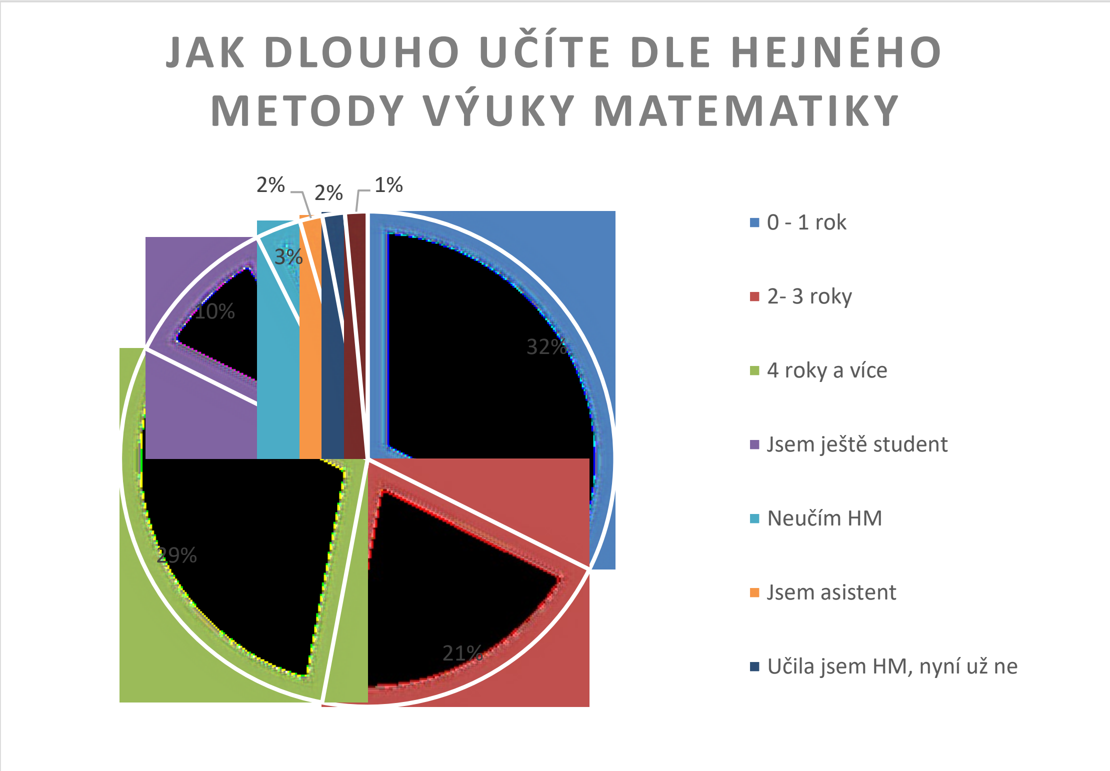
Touto otázkou jsem chtěla prozkoumat skupinu dotazovaných, a také mě zajímalo, zda se dotazník dostane i k někomu, kdo není učitel. Což se podařilo, mezi respondenty

[18] V následujícím textu bude pro termín Hejného metoda výuky matematiky použita zkratka HM.

se našlo 10 % studentů, dvě procenta zastoupili asistenti pedagoga, a jedním procentem, které mi udělalo velkou radost, byla maminka ze Slovenska, která dle HM učí doma.

Celých 82 % z dotázaných odpovědělo, že dle HM učí, 32 % z toho má téměř roční zkušenost, 21 % učí dva až tři roky a celých 29 % učí již 4 roky a více. Kromě výše zmíněných dotazník vyplnili také respondenti, kteří s HM skončili a ti tvořili dvě procenta.

Graf 2 - Jak dlouho učíte dle Hejného metody výuky matematiky



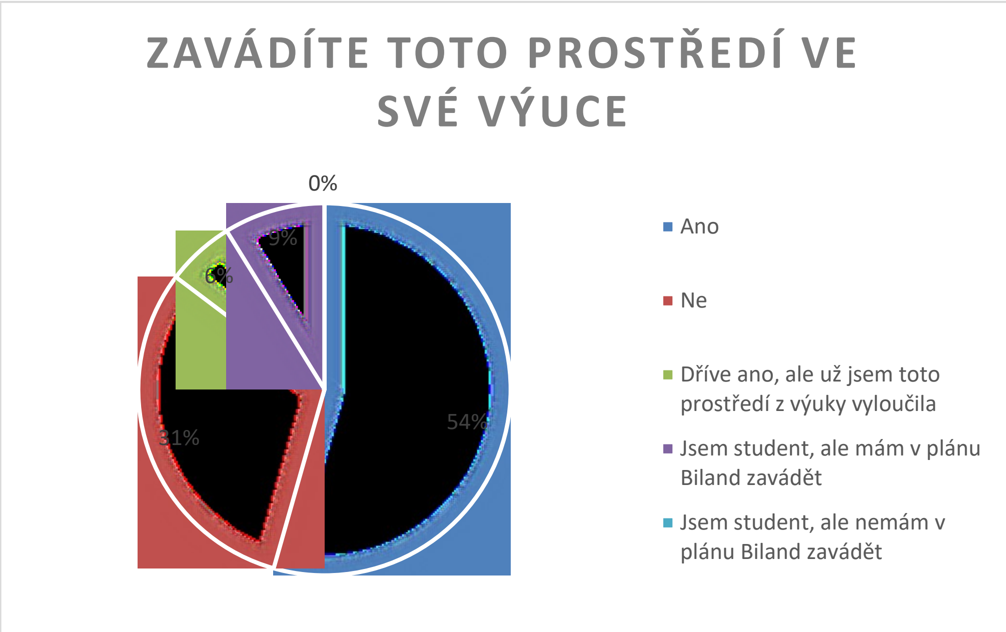
(zdroj: Tereza Vybíralová)

V následující otázce *Zavádíte toto prostředí ve své výuce,* záporně odpovědělo 31 % dotázaných. 6 % učitelů toto prostředí ze své výuky po nějaké době vyřadilo. Jejich důvody budou uvedeny v následující části.

Velmi pozitivní zprávou pro mě je však to, že více než polovina – celých 54 % respondentů toto prostředí do své výuky zařazuje. Radostnou zprávou je i fakt, že dalších

9 % respondentů – studentů, Biland do své výuky plánuje začlenit. Žádný z respondentů studentů neplánuje po dokončení studia prostředí nezařazovat.

Graf 3 – Zavádíte toto prostředí ve své výuce



(zdroj: Tereza Vybíralová)

Po společné části dotazníku byli respondenti rozděleni do 3 skupin podle toho, zda Biland do výuky zařazují či nikoli.

První skupinou byli respondenti, kteří Biland zařazují. Do této skupiny spadají i ti, kteří jsou teprve studenty, ale mají v plánu s prostředím v budoucnu pracovat. První otázka v tomto okruhu mapovala, v jakém ročníku učitelé Biland zavádějí. Odpovědi překvapivě pokryly celou škálu – od prvního do pátého ročníku. Nejčastější odpovědí byl 2. ročník, a je zřejmé, že více než polovina respondentů zařazuje prostředí tak, jak je doporučeno v metodických příručkách. Překvapivým zjištěním je to, že se objevili i respondenti, kteří vstupují do Bilandu již v prvním ročníku. V tomto případě se domnívám, že dotázaný se při vyplňování zmýlil, anebo se s prostředím nesetkal, a tudíž ročník jen tipnul. Troufám si tvrdit, že každý, kdo se s Bilandem kdy setkal, by ho v prvním ročníku rozhodně nezařazoval.

Naopak je pochopitelné, že někteří učitelé přesouvají práci s tímto prostředím do vyšších ročníku, nejčastěji do 3. ročníku (28 % z dotázaných). 7 % respondentů poté ještě o ročník výš – do 4. ročníku a v 5. ročníku s Bilandem seznamuje žáky 6 % dotázaných.

Graf 4 – V kolikátém ročníku toto prostředí zavádíte

(zdroj: Tereza Vybíralová)

Po této otázce již následovaly otevřené otázky, které byly dobrovolné. Byly totožné pro všechny skupiny respondentů, nehledě na to, zda je Biland součástí jejich výuky či nikoli.

Otázky zjišťovaly, v čem respondenti shledávají přínosy a nedostatky tohoto prostředí. A také, zda existuje něco, v čem by se prostředí dalo vylepšit nebo změnit. Odpovědi jsem rozklíčovala do oblastí a zaznamenala jejich četnost do tabulky (příloha 5).

První otázka zněla: *V čem považujete prostředí přínosné.* Nejčastější odpovědí bylo to, co se dočteme i v učitelské příručce. Práce s dvojkovou soustavou, IT a odpoutání se od desítkové soustavy. Druhou nejčastější odpovědí bylo to, že za přínosné v Bilandu dotazovaní považují to, že je prostředí atraktivní, zábavné a dává žákům dostatek prostoru pro manipulaci a hru na obchod. Kromě toho bylo častou odpovědí i to, že prostředí rozvíjí logické myšlení a podporuje abstraktní myšlení. Poslední nejčastější odpovědí byla práce s číslem – rozklad čísla, vztahy mezi čísly, mocniny čísla a představa o čísle.

Kromě výše zmíněných dotazovaní za přínosné uvedli: *„budování schémat v cizím prostředí, tvorba strategií, finanční gramotnost, matematika 2. stupně, nové zkušenosti, propojení teorie s praxí, geometrickou řadu, kombinatorika, násobilka, substituce, směna a postupné dělení.“* Tři dotázaní uvedli, že prostředí neshledávají přínosné v ničem.

Druhá otázka zněla: *V čem shledáváte jeho nedostatky*. Opět jsem odpovědi roztřídila do několika skupin.

Překvapivě nejčastější odpovědí bylo, že nedostatky v tomto prostředí neshledávají. Nejvíce bylo Bilandu vyčítáno, to, že je to prostředí, které vyžaduje abstrakci, kterou slabší žáci nezvládají. Další velká skupina vytýkala náročnost ze strany učitele. Respondenti často odpovídali, že velký nedostatek shledávají v přípravě, jelikož prostředí Biland je složité, učitel musí učivu opravdu rozumět a hodina vyžaduje důkladnou přípravu včetně pomůcek. Nejednou se objevila odpověď, že se v Bilandu používá hodně druhů mincí (respondent v dotazníků uvedl: *„je zde příliš mnoho řádů mincí“*), a že Fg už je moc vysoká nominální hodnota. V souvislosti s mincemi se také objevily výtky k začátkům s prostředím – bohatě by prý stačilo začít se třemi mincemi (Ag, Bg, Cg). Respondenti také zmínili několik problémů z časového hlediska. Část respondentů si stěžovala na nedostatek času k zařazení tohoto prostředí. Některým přijde, že se prostředí objevuje moc brzy, že ve druhé třídě je nevhodné, a patří na druhý stupeň. A někteří naopak tvrdí, že v páté třídě žáky nebaví si hrát na obchod. Několik respondentů také zmínilo nedůvěru v toto prostředí ze strany rodičů.

Kromě pochval a výtek mě také zajímalo, jestli je něco, co by učitelé chtěli v prostředí změnit. Poslední otázka zněla: *Kdybyste v tomto prostředí mohli něco změnit, co by to bylo?*

I přesto, že se někomu může zdát, že poslední dvě otázky jsou totožné, cítím v nich jistý rozdíl. Poslední otázka proto zjišťovala, zda je něco, co by malou změnou ulehčilo učitelům s prostředím pracovat. Nebo by je k práci s prostředím nalákalo.

Nejčastější odpovědí bylo, že by nic neměnili. Nejvíce žádaná změna spočívala v úlohách v učebnici. Z odpovědí vyplývá, že by práce s Bilandem byla jednodušší, kdyby byl jeho nástup pozvolnější, začalo by se s méně mincemi a v učebnici se objevovalo více úloh s menšími rozestupy. Další připomínkou byla poptávka papírových grošů, nicméně ty jsou součástí učebnice, takže je nejspíš dotázaný přehlédl.

Poslední skupinou jsou odpovědi na otázku, proč se respondenti rozhodli prostředí Biland z výuky vyloučit. Opětovaně se objevovaly odpovědi, že učitel neshledává v prostředí přínos, a proto se rozhodl Biland z výuky vyloučit. Druhým důvodem byl ten, že učitel
již nevyučuje dle HM, takže logicky Biland do výuky nezařazuje.

3.8.4 Shrnutí dotazníkového šetření

Musím říct, že výsledky dotazníku mě mile překvapily. Z počátku jsem se výsledků obávala a můj přístup byl velmi pesimistický. Z mých dosavadních zkušeností jsem měla dojem, že Biland nikdo nezná a nikdo ho do své výuky nezařazuje, anebo ho zná, ale stejně s ním pracovat nechce.

Prvním pozitivním zjištěním bylo, že velká většina dotázaných o Bilandu už slyšeli. Tím dalším byl fakt, že více než polovina ho do své výuky zavádí. Kromě toho se ukázalo, že popularita Bilandu stoupne spolu s příchodem nynějších studentů do řad učitelů, jelikož se všichni studenti, kteří v dotazníku odpovídali, rozhodli ve své výuce s Bilandem pracovat.

U odpovědí na otázku *V kolikátém ročníku Biland zavádíte,* jsem si potvrdila, že většina učitelů následuje metodickou příručku a učebnice. Radostnou zprávou pro mě byl ale fakt, že velké procento učitelů toto prostředí přesouvá do vyšších ročníků. Troufám si tvrdit, že vnímají jeho potenciál a rozhodli se mu věnovat později.

Nejvíce jsem se těšila na to, až si přečtu, v čem shledávají respondenti přínos tohoto prostředí. Odpovědi byly často překvapivě velmi přesné a domnívám se, že si respondenti opravdu uvědomují, v čem je toto prostředí přínosné. Kromě vhledu do dvojkové soustavy, se objevuje i důležitost finanční gramotnosti. Mimo jiné shledávají respondenti přínos také v rozvoji sociální oblasti žáka a vnímají důležitost hry a manipulace, která je pro Biland klíčová.

Nepochopitelným paradoxem pro mě je skupina učitelů, kteří se i přesto, že jsou si vědomi potenciálu prostředí Biland, práci s ním obloukem vyhýbají. Častým argumentem je to, že je to příliš těžké, jak pro žáky, tak pro učitele a i rodiče. Upřímně si myslím, že nic v životě není jednoduché a neměli bychom se před výzvami ukrývat, ale naopak jim čelit. A i když se to občas nevyvede, rozhodně nás to obohatí.

Výtky, které byly vůči Bilandu zmíněny, jsou podle mého názoru na místě, sama jsem přesvědčená o tom, že nástup prostředí by měl být pozvolnější a ve vyšším ročníku, a mělo by se v učebnici objevit více úloh. Vzhledem k tomu, že na počátku roku 2018 začaly vycházet nové učebnice H-mat, o.p.s., tak jsem zvědavá, v čem prostředí vylepšili a na jaké změny se můžeme těšit.

Výsledky dotazníkového šetření mě ale celkově potěšily a utvrdily mě v tom, že je potřeba o Bilandu více mluvit, sdílet zkušenosti, vzájemně si radit, jak s ním pracovat, a především se dělit o radosti, které Biland žákům i učitelům přináší.

4 Závěr

Díky této diplomové práci jsem se na své plavbě podívala do jednoho z nejzazších koutů matematického moře. Cesta byla dlouhá, často náročná a občas velmi nebezpečná, ale zároveň to bylo dobrodružství, na které nikdy nezapomenu.

První zastávka byla u souostroví vyučovacích stylů. Během této návštěvy jsem nejprve prozkoumala ostrov tradičního, transmisivního stylu, jež se pyšní dominancí učitele. Učitel svou roli plní tak, že své vlastní poznatky žákům předává. Poté jsem navštívila ostrov konstruktivismu a pokusila se si osvojit jeho zásady, a zároveň jsem se je okamžitě snažila promítnout do svých vlastních činů. Chloubou ostrova konstruktivismu je především aktivní činnost žáka. Což ale nevylučuje důležitost učitele. Naopak, definice konstruktivistického učitele se jeví být velmi specifickou. Učitel má být žákům oporou, nabízet jim příležitosti k objevům a zejména je podporovat a věřit v to, že to dokážou. Během experimentu se potvrdilo, že způsob, jakým učitel svou roli plní, je v konstruktivismu stěžejní, a ukázalo se, jaké důsledky nastanou v případě, kdy vyučující zásady nerespektuje, a naruší tak jeden ze základních z pilířů konstruktivismu.

Divoký vítr mě po cestě zanesl do temné zátoky číselných soustav. Ta se zpočátku jevila jako místo, ve kterém budu nadobro ztracená a jehož jazyk mi přijde navždy cizí. Důsledně jsem studovala historický vývoj číselných soustav, díky němuž jsem později porozuměla rozdílu mezi poziční a nepoziční soustavou, a taktéž mi bylo jasnější, na jakých principech jednotlivé poziční soustavy fungují.

V souvislosti s historickým vývojem těchto soustav jsem se zajímala o to, jaké jsou názory na výuky pozičních soustav. Zda je považováno za podstatné jí ve výuce věnovat pozornost, a jaké se proto uvádějí důvody. Narazila jsem na experiment pana profesora Hejného, jenž důležitost výuky různých pozičních soustav potvrzuje. Stejný názor sdílí i jeden z mých kolegů, a této problematice se věnoval ve své diplomové práci. Díky těmto poznatkům jsem si ujasnila, na jakých základech stojí prostředí Biland, došlo mi, v čem spočívá jeho obrovský přínos a zkrátka jsem se utvrdila v tom, že prostředí Biland rozhodně má svoje místo ve výuce matematiky.

Pozoruhodná byla i má další výprava, jejíž cíl spočíval v mapování učebnic. Zkoumala jsem jak celkové rozložení úloh, jež bylo velmi proměnlivé, tak každou úlohu zvlášť, a u každé jsem pozorovala její potenciál. Úlohy se nejprve neobjevovaly vůbec, pak se najednou objevily a rovnou byly celkem náročného charakteru. Domnívám se, že by bylo přínosnější, kdyby byl vstup do prostředí střídmější, a zároveň jsem přesvědčená, že rozložení úloh mohlo být vyváženější.

Empirickou část své diplomové práce jsem započala naprosto nevědomky během průběžné praxe. O to hezčí návrat k této zkušenosti to byl, když jsem se rozhodla, že na ni navážu svou diplomovou prací. Dvouletý rozestup mezi oběma událostmi mi umožnil nabýt mnohé zkušenosti, jež jsem se posléze do samotných experimentů snažila promítnout.

A tak s radostí, a zároveň obrovskou pokorou, můžu říct, že jsem naplnila jeden ze stěžejních cílů, které jsem si během zpracovávání této práce stanovila. Není jím nic jiného než představení a realizace mého autorského počinu, který spočívá v konstruktivistickém zavedení prostředí Biland.

Vstup do nového prostředí jsem s žáky realizovala v rámci dvou experimentů, které jsem nahrála a oba videozáznamy přepsala do protokolů. Protokoly mi přinesly jasné důkazy toho, v čem je pro žáky prostředí problematické.

Problém, který vnímám jako stěžejní pro toto prostředí, vyplynul z diskuze mezi dvěma žáky, kdy pro jednoho z nich bylo těžké přijmout fakt, že nominální hodnota mincí není definována číslem tak, jako je to u našich korun. To, že jejich hodnota vyplývá se vztahů, které mezi nimi platí, mu značně stěžovalo řešení úloh.

Díky protokolům jsem dokázala pojmenovat i další oblast, která žáky během práce v Bilandu trápila. Během řešení jednotlivých úloh se ukázalo, že jsou žáci velmi pevné svázáni myšlenkou, že jiná posloupnost než 1, 2, 3, pro ně není přípustná. A proto nechtěli přijmout fakt, že Cg je roven 4 Ag (a ne třem, jak by očekávali). To potvrzuje i myšlenku Hejného, který namítá, že je žákům potřeba nabídnout širokou paletu modelů.

V neposlední řadě experimenty nastavily zrcadlo mně samotné, kdy jsem z videonahrávky mohla rozebírat a hodnotit i své vlastní činy. Nyní, s odstupem času můžu říct, že bych experimenty naplánovala trochu jinak, některé momenty bych vynechala úplně a v jiných situacích byla naopak pozornější. Zároveň jsem si vědoma toho, že bez toho všeho moje poznání by nikdy nebylo takové, jaké dnes. Ze všech chyb, kterých jsem se dopustila, nemá smysl být smutná, ale naopak se k nim postavit čelem a s radostí z nich čerpat do budoucnosti.

Díky pracovním listům, které žáci po zavedení prostředí vyplnili, jsem měla možnost pozorovat jejich řešitelské strategie a zkoumat především chybná řešení. Ta mi dala další zpětnou vazbu o tom, jak žáci prostředí porozuměli. Z pracovních listů vyplynulo, že někteří žáci problematice porozuměli, u některých se objevily pouze chyby z nepozornosti, ale nejpřínosnější chyby byly ty, jež ukazovaly, že žáci zatím dostatečně neporozuměli vztahům mezi jednotlivými mincemi. Taková zpětná vazba mi říká, že je potřeba tomu dát čas, dále pak žáky zásobovat úlohami, aby získali zkušenosti, a současně jim k řešení poskytnout pomůcky.

Poslední částí mé empirické části bylo dotazníkové šetření, které zkoumalo vztah učitelů k Bilandu. Navzdory počáteční skepsi jsem byla výsledky velmi překvapena. Valná většina respondentů prostředí zná a také s ním méně či více pracuje, což je velmi potěšující zjištění. Z výsledků vyplývá, že si učitelé potenciál tohoto prostředí dobře uvědomují, ale současně se mu vyhýbají. Získala jsem jasný obraz o tom, v čem shledávají jeho největší úskalí. Důvodem, proč se učitelé, řekněme prostředí bojí, a nechtějí s ním pracovat, je ten, že je příliš náročné, abstraktní, a jejich strach umocňuje fakt, že se s ním v učebnici pracuje velmi nárazově. Obavy, které vzešly z dotazníků, jsou na místě a současně se potvrdily jak během mého experimentu, tak pracovními listy. Výsledek dotazníkového šetření mě utvrdily v tom, že je učitelům chybí dvě zásadní věci pro práci s Biland. Tou první jsou informace o tom, jak a proč s prostředím pracovat, tou druhou je kuráž k tomu, aby s ním vůbec pracovat začali.

Závěrem bych chtěla říct, že jsem moc vděčná za to, že jsem se rozhodla právě tomuto tématu věnovat ve své diplomové práci, protože pro mě bylo obohacující v mnoha směrech – jako studentku, jako budoucí paní učitelku, a především jako člověka.

5 Seznam použitých informačních zdrojů

BĚLÍK, Miroslav. *Poziční číselné soustavy*. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta UJEP, 1999. 60 s. ISBN 80-7044-260-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8, Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2009. 127 s. ISBN 978-80-7238-684-0.

BOGOMOLNY, Alexander. *Place value, self-descriptive sentences* [online]. In- teractive Mathematics Miscellany and Puzzles, 1999. [cit. 2018-04-26]

Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/ctk/SelfDescriptive.shtml>.

ČAPEK, Robert. *Moderní didaktika: lexikon výukových a hodnoticích metod*. Vydání 1. Praha: Grada, 2015. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-3450-7.

DVOROŽŇÁK, Marek. *Interaktivní výuka pozičních soustav na ZŠ*. [online] České Budějovice, 2010. Diplomová práce. Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Helena Binterová. [cit. 2018-02-05]. Dostupné z: https://theses.cz/id/yxcezl/DP_-_Interaktivni_vyuka_pozicnich_soustav_na_ZS_-_Marek_D.pdf

JELÍNEK, Miloš. *Numerační soustavy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p., 1974. 128 s.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupn*ě. 1. vyd. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014, 229 s. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Příručka učitele. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-771-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 2. ročník základní školy*, 3 díl. Ilustroval Lukáš

URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-982-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka Michnová. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Příručka učitele. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-827-1.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: učebnice pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Ilustrace Lukáš Urbánek, Dana Raunerová. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ, Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Ilustrace Lukáš Urbánek, Dana Raunerová. Plzeň: Fraus, 2011b. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. Pedagogická praxe. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan a Naďa VONDROVÁ. *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 1999, 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-731-5039-5.

Národní strategie finančního vzdělávání. [online]. Praha: Ministerstvo financí, 2010. [cit. 2018-06-30]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/31443_1_1/

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2013. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/43792/

VANTUCH, Juraj a Helena BEREKOVÁ. Teória čísel a číselné sústavy. In *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, druhé vydání, 1990. 3, s. 98–128. ISBN 80-08-01344-3.

WITTMANN, Erich. *Mathematics as the Science of Patterns - A Guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood.* [online]. [cit. 2018-06-25] Dostupné z: https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_11_et_suppl/adsc11supplweb_wittmaneng.pdf

6 Seznam příloh

Příloha 1 – Původní příprava na předexperiment

Příloha 2 – Přepracovaná příprava na experimenty

Příloha 3 – Pracovní list pro žáky po zavedení prostředí

Příloha 4 – Dotazník pro učitele

Příloha 5 – Zpracovaná data získaná z dotazníku